

Jaki jest następny wyraz tego ciągu?

Paweł MATEJEK*

3, 7, 31, 211, 2311, ... – jaki jest następny wyraz tego ciągu? Jakiś czas temu taka zagadka pojawiła się na jednej z polskich rozrywkowych stron internetowych. Niemal od razu w komentarzach pod nią rozpoczął się spór o poprawne, *prawdziwe* rozwiązanie. Czytelnik zapewne zechce podjąć wyzwanie samodzielnie odnalezienia następnego elementu ciągu i jego ogólnej reguły. Zatem zatrzymajmy się tu i pozwólmy sobie na chwilę namysłu; w dalszej części tekstu pojawi się rozwiązanie (autorowi niniejszego tekstu zajęło kilka dłuższych chwil znalezienie formuły).

Autor myślał tak: wszystkie te liczby są nieparzyste, a nawet pierwsze; początkowe dwie są jednocyfrowe, następne mają jedynekę jako cyfrę jedności. Z braku lepszych pomysłów odejmijmy 1 od każdej z tych liczb – otrzymamy wtedy: 2, 6, 30, 210, 2310. Łatwo można zauważyć, że $6 = 2 \cdot 3$, $30 = 6 \cdot 5$, $210 = 30 \cdot 7$ i szybko sprawdzić, że $2310 = 210 \cdot 11$. Czyli zaczynamy od 2, mnożymy przez 3, potem wynik mnożymy przez 5, kolejny wynik mnożymy przez 7, a ten z kolej przez... nie, nie przez 9. Przez 11. Czemu nie przez 9? Widać nie chodzi o kolejne liczby nieparzyste. Więc może kolejne liczby pierwsze? Jak dotąd, iloczyny budowaliśmy z kolejnych liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, więc pewnie to o to tu chodzi. Kolejną liczbą pierwszą jest 13, zatem Czytelnik Sprawny szybko obliczy w pamięci (a mniej sprawny za pomocą kalkulatora, jak to i autor uczynił), że $2310 \cdot 13 = 30030$. Teraz trzeba jeszcze tylko dodać do tego jedynekę i mamy rozwiązanie zagadki: następną liczbą jest 30031, zaś n -ty wyraz ciągu powstaje przez dodanie jedynek do iloczynu n kolejnych liczb pierwszych.

Po uzyskaniu powyższego wyniku zadowolony z siebie autor (niechaj Czytelnik Przejorny zawsze strzeże się nadmiernego zadowolenia z siebie – niewiele jest rzeczy równie pewnie wiodących do zguby!) postanowił skonfrontować swoje rozumowanie z tymi przedstawionymi w komentarzach. Był więcej niż zdziwiony, gdy zobaczył odpowiedź: 509 – i to bez słowa wyjaśnienia. Cóż więc pozostało uczynić, jak nie zwrócić się po pomoc do mądrzejszych od siebie? *Wolfram Alpha* rzeczywiście podaje 509 jako kolejny prawdopodobny wyraz podanego ciągu, z wyjaśnieniem odsyłając do *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Tam możemy przeczytać, że n -ty element badanego ciągu to największy dzielnik pierwszy iloczynu n kolejnych liczb pierwszych powiększonego o jeden, a dalej, że pomysł tego ciągu wywodzi się z dowodu Euklidesa, iż istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych. Zamiast się wyjaśnić, sprawa stała się jeszcze bardziej zagmatwana. Co do rzeczy ma Euklides? Przypomnijmy może twierdzenie i dowód (mówiąc ściślej, współczesną interpretację tego dowodu), które zamieścił w swoich *Elementach*.

Twierdzenie. *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.*

Dowód (Euklidesa). Swój dowód Euklides przeprowadził metodą *reductio ad absurdum*. Podążając tropem jego myśli, załóżmy, że istnieje skończenie wiele liczb pierwszych. Oznaczmy je w kolejności rosnącej jako: p_1, p_2, \dots, p_n . Zdefiniujmy liczbę $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Nie dzieli się ona przez żadną z liczb pierwszych p_1, p_2, \dots, p_n , bo reszta z dzielenia zawsze wynosi 1, nie jest więc złożona. Jest też większa od każdej z liczb p_i , nie jest więc także pierwsza. Ale przecież każda liczba naturalna (większa od 1) jest albo pierwsza, albo złożona, z definicji pierwszości. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że poczynione przez nas założenie było fałszywe, a więc, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Czytając powyższy dowód nie dość uważnie, można by w pierwszej chwili pomyśleć, że skonstruowana w powyższym dowodzie liczba A jest kolejną liczbą pierwszą, którą można równie dobrze oznaczyć jako p_{n+1} . Otóż A nie musi być kolejną liczbą pierwszą, mogą istnieć inne liczby pierwsze większe niż każda z p_i , ale mniejsze niż A . W istocie A nie musi być w ogóle liczbą pierwszą – może być iloczynem kilku liczb pierwszych większych niż liczby p_i . Obrazują to dwa przykłady.



Rozwiązanie zadania F 856. Świecenie neonówki nastąpi, gdy przyłożone napięcie wystarczy do rozpędzenia (pomiędzy zderzeniami) znajdujących się w niej elektronów do energii równej energii jonizacji atomów. Pomiędzy zderzeniami elektron uzyskuje energię E :

$$E = \frac{eUl}{d},$$

gdzie l oznacza drogę swobodną elektronu (patrz zadanie 855), e ładunek elektronu, a eU/d jest równe natężeniu pola elektrycznego pomiędzy elektrodami. Oznacza to, że droga swobodna elektronu powinna wynosić:

$$l = \frac{E_0 d}{eU},$$

czyli około 650 μm . Droga swobodna jest odwrotnie proporcjonalna do ciśnienia gazu, a więc w neonówce powinno panować ciśnienie

$$p = 0,59p_0/650 \approx 0,0009p_0 = 0,92 \text{ hPa.}$$

W wyniku zderzeń powstaną także jony neonu – ich drogi swobodne są jednak kilka razy mniejsze niż elektronów, a więc nie będą między zderzeniami uzyskiwały energii wystarczających do zderzeniowego jonizowania dalszych atomów.

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

**Rozwiązanie zadania M 1421.**

Udowodnimy indukcyjnie względem n , że dla każdego $1 \leq k \leq n$ jest prawdziwa nierówność z tezy zadania. Dla $n = 1$ mamy

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 < e.$$

Zakładając prawdziwość tezy dla n , udowodnimy ją dla $n + 1$. Ponieważ $\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$ dla $j \geq 1$ oraz $\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j}$ dla $j = 0$, otrzymujemy dla $k < n + 1$

$$\sum_{j=0}^k \binom{n+1}{j} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}.$$

Dla $k = n + 1$ ten wzór jest również prawdziwy, jeśli przyjmiemy $\binom{n}{n+1} = 0$.

Korzystając z założenia indukcyjnego, dostajemy

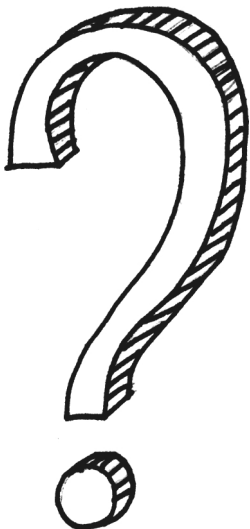
$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \binom{n+1}{j} &< \left(\frac{en}{k}\right)^k + \left(\frac{en}{k-1}\right)^{k-1} = \\ &= \left(\frac{e}{k}\right)^k \left(n^k + \frac{1}{e} \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} kn^{k-1}\right). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} < \\ &< \frac{1}{e} \cdot e = 1 \end{aligned}$$

oraz $n^k + kn^{k-1} \leq (n+1)^k$, otrzymujemy

$$\sum_{j=0}^k \binom{n+1}{j} < \left(\frac{e(n+1)}{k}\right)^k.$$



Przykład 1. Załóżmy, że jest tylko pięć liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11. Wtedy konstruujemy liczbę $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$. Liczba ta nie dzieli się przez żadną z wybranych liczb pierwszych. W istocie nie dzieli się przez żadną liczbę mniejszą od siebie (nie licząc jedynki), zatem jest to liczba pierwsza, jednak inna niż ta z poczynionego założenia – sprzeczność. Przy czym istnieją też inne, mniejsze liczby pierwsze, np. 13.

Przykład 2. Załóżmy, że jest tylko sześć liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, 13. Wtedy konstruujemy liczbę $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$. Liczba ta nie dzieli się przez żadną z wybranych liczb pierwszych. Ale okazuje się, że $30031 = 59 \cdot 509$, przy czym tak 59, jak i 509 są pierwsze, choć nie zostały wymienione w założeniu. Znowu sprzeczność.

A więc to o to w tym wszystkim chodziło – o ilustrację powyższego dowodu, w szczególności niuansu zilustrowanego przykładami. Teraz już wiadomo, jak i dlaczego badany ciąg został określony. No dobrze, czy w takim razie 30031 jest złą odpowiedzią? Nie, odpowiedź ta jest zgodna z treścią zadania – jest to ciąg o zadanych początkowych elementach i prostej regule tworzenia kolejnych wyrazów. Tyle, że to inny ciąg niż oczekiwany przez twórcę zadania. Zbieżność początkowych wyrazów obu ciągów wynika z faktu, że owe wyrazy są liczbami pierwszymi, a więc ich największymi dzielnikami pierwszymi są one same. Dopiero następny iloczyn, 30031, czy też jego największy dzielnik pierwszy, 509, ujawniają różnicę. Gdyby w zagadce podano o jedną liczbę więcej, byłoby jasne, o który ciąg chodzi: ciąg 3, 7, 31, 211, 2311, 30031 będzie kontynuowany przez 510528, zaś ciąg 3, 7, 31, 211, 2311, 509 przez 277.

Właśnie ta niejednoznaczność wywołała burzliwą dyskusję, zresztą zupełnie niepotrzebną. Dla matematyka jest oczywiste, że gdy w zadaniu należy znaleźć obiekt o pewnych własnościach określonych w treści zadania, to próbuje znaleźć wszystkie obiekty spełniające zadane warunki. Na przykład, kiedy szuka rozwiązań równania $x^2 - x = 0$, nie zadowala się samą jedynką, czy też samym zerem – jako rozwiązania podaje obie te liczby. Problem leży raczej po stronie samych zagadek pt. *jaka jest następna liczba?* Jeżeli podamy kilka liczb, możemy dobrać do nich nieprzeliczalnie wiele nieskończonych ciągów, których początkowe wyrazy będą takie, jak te podane, np. 3, 7, 31, 211, 2311, 0, 0, 0, ..., albo 3, 7, 31, 211, 2311, 314, 31415, 3141592, ..., żeby już trzymać się naszego ciągu.

Oczywiście, nie o to chodzi w zagadkach, ale o to, by na podstawie podanych początkowych wyrazów znaleźć metodę otrzymywania kolejnych, by znaleźć ogólny schemat. Ale nawet przy takim ograniczeniu nadal mamy nieskończenie wiele różnych wzorów. Do węzłów (1, 3), (2, 7), (3, 31), (4, 211), (5, 2311) możemy (nawet nie musimy) dołożyć sobie dowolne kolejne, np. (6, 66), (12, 2013), znaleźć jakąś funkcję określoną na całej prostej i przechodzącą przez podane punkty (najprościej numerycznie, za pomocą komputera), by na koniec ograniczyć dziedzinę do argumentów naturalnych, otrzymując w ten sposób ciąg spełniający warunki zadania, wraz ze sposobem obliczania kolejnych jego wyrazów. Możemy nawet z góry zadać następny element, jak w przypadku węzła (6, 66) – to właśnie on wygeneruje kolejny wyraz równy 66.

I tu właśnie leży sedno: ściśle poprawna odpowiedź musiałaby zawierać wszystkie ciągi rozpoczynające się zadanymi liczbami, a zagadka, jako łamigłówka, powinna mieć jedną, stosunkowo łatwą do znalezienia odpowiedź. Rzecz jasna, jej znalezienie wcale nie musi być łatwe, ale rozwiązania nie powinny wymagać zaawansowanych studiów (w każdym razie tak autor postrzega zagadki i chyba nie jest w tym odosobniony). Stąd niejawnie założenie jednoznaczności. Czy nonsensowne? Raczej nie, choć wymaga ostrożności przy takim konstruowaniu zagadek, by oczekiwane rozwiązanie było naturalne i wyraźnie łatwiejsze do znalezienia niż pozostałe, nienaturalne i nieoczekiwane. Ta naturalność wymaga pewnej intuicji i wyczucia przy tworzeniu zagadek. Czy w takim razie opisana zagadka jest zła? Chyba nie, skoro skłoniła do przemyśleń co najmniej jedną osobę (autora), czego efektem jest niniejszy tekst.