

Choć proste to nieproste

Starożytni Egipcjanie sprzed 4000 lat uznawali tylko ułamki proste, czyli takie, które w liczniku miały jedynkę. Oczywiście, były też inne ułamki, ale o nich uczeni mówić nie chcieli – przedstawiali je jako sumę ułamków prostych. Nie byłoby w tym niczego nadzwyczajnego, gdyby nie pretensjonalne wymaganie, aby w owej sumie każdy ułamek był inny.

Czy każdy ułamek da się przedstawić jako sumę różnych ułamków prostych? Tak, jest nawet bardzo prosty algorytm, pozwalający to zrobić: od ułamka należy odejmować największy jak się da ułamek prosty.

Zobaczmy to na przykładzie rozkładu $\frac{9}{19}$:

$$\frac{9}{19} - \frac{1}{3} = \frac{27 - 19}{57} = \frac{8}{57}, \quad \frac{8}{57} - \frac{1}{8} = \frac{64 - 57}{456} = \frac{7}{456},$$

$$\frac{7}{456} - \frac{1}{66} = \frac{462 - 456}{456 \cdot 66} = \frac{6}{456 \cdot 66} = \frac{1}{456 \cdot 11} = \frac{1}{5016},$$

Zatem $\frac{9}{19} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{66} + \frac{1}{5016}$.

Patrząc na te rachunki, widzimy, że przy naszym algorytmie w każdym kroku licznik maleje o 1 (Czytelniku, udowodnij to!). Stąd widać, że algorytm ma własność stopu – jeśli w liczniku było k , to taki rozkład (a mogą być inne?) będzie zawierał co najwyżej k ułamków prostych.

Dla $\frac{2}{29}$ algorytm daje rozkład $\frac{1}{15} + \frac{1}{435}$, ale dobrym rozkładem jest też $\frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$.

Widzimy jednak, że w pewnym momencie coś się skróciło i ułamków było mniej – nie 9, a tylko 4. I to się zdarza bardzo często już nawet dla małych liczników, np.

$$\frac{4}{13} - \frac{1}{4} = \frac{16 - 13}{52} = \frac{3}{52},$$

$$\frac{3}{52} - \frac{1}{18} = \frac{54 - 52}{52 \cdot 18} = \frac{2}{52 \cdot 18} = \frac{1}{52 \cdot 9} = \frac{1}{468},$$

czyli $\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{468}$.

Badacze ułamków prostych, obserwując ich zachowanie, postawili ważne, do dziś nierozstrzygnięte pytanie:

Problem Erdősa–Strausa:

czy każdy ułamek $\frac{k}{n}$ jest sumą trzech różnych ułamków prostych?

Andrzej Schinzel zaryzykował natomiast niepotwierdzoną dotychczas hipotezę:

dla dowolnego k istnieje takie N , że dla dowolnego $n > N$ ułamek $\frac{k}{n}$ jest sumą trzech różnych ułamków prostych.

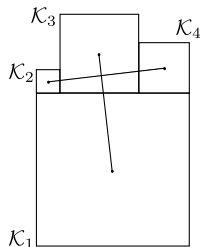
Czytelniku – do roboty!

M.K.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1426. Dany jest kwadrat \mathcal{K}_1 . Na jednym z jego boków, na zewnątrz, zbudowano trzy sąsiadujące kolejno kwadraty $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$. Udowodnić, że odcinki łączące odpowiednio środki kwadratów $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_3$ oraz $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_4$ są prostopadłe.

Rozwiązanie na str. 3

M 1427. Czy, mając do dyspozycji cztery kolory, można pokolorować każdą liczbę rzeczywistą nieujemną na jeden z nich tak, aby żadne liczby a, b, c spełniające zależność $a + b = 2c + 2$ nie były tego samego koloru?

Rozwiązanie na str. 3

M 1428. Niech a_1, \dots, a_n będą liczbami dodatnimi i niech S_k oznacza sumę wszystkich iloczynów różnych k liczb spośród a_1, \dots, a_n ,

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_k}.$$

Udowodnić, że dla każdego naturalnego $1 \leq k \leq n - 1$ spełniona jest nierówność

$$S_k S_{n-k} \geq \binom{n}{k}^2 a_1 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Rozwiązanie na str. 20

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 859. Naczynie o objętości V i ściankach doskonale odbijających promieniowanie elektromagnetyczne wypełnione jest promieniowaniem o całkowitej energii E . Jakie ciśnienie p na ścianki naczynia wywiera zawarte w nim promieniowanie elektromagnetyczne?
Rozwiązanie na str. 23

F 860. Zmierzona przez satelity (tj. poza atmosferą) średnia wartość strumienia energii promieniowania słonecznego (tzw. stała słoneczna) wynosi

$q = 1360 \text{ W/m}^2$. Jaki jest stosunek siły odpychającej Ziemię od Słońca wynikającej z wywieranego przez to promieniowanie ciśnienia do siły grawitacyjnego przyciągania Ziemi i Słońca?

Dla uproszczenia przyjmujemy, że całe promieniowanie jest pochłaniane przez Ziemię, przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, odległość Ziemia-Słońce to średnio $R_{ZS} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, rok trwa w przybliżeniu $T = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$, stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Rozwiązanie na str. 23

Wskazówka: Promieniowanie elektromagnetyczne to gaz fotonów.