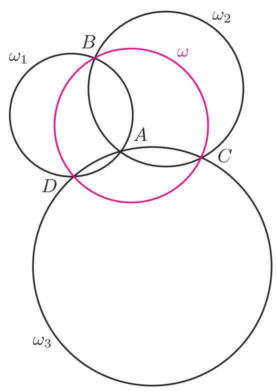
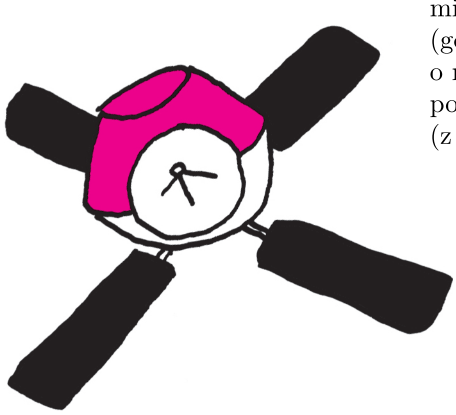
Rozwiązanie zadania M 1466.
Odp. Nie!

Przypuśćmy, że istnieje taki zbiór W. Wówczas istnieją w tym zbiorze okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, które mają punkt wspólny A, oraz okrąg ω, który nie przechodzi przez A. Oznaczmy punkty wspólne, różne od A, okręgów ω_1 i ω_2, ω_2 i ω_3, ω_3 i ω_1, odpowiednio przez B, C oraz D. Wówczas ω przechodzi przez wszystkie te punkty.

Rozważmy piąty okrąg ω' ze zbioru W.



Musi on przechodzić przez A lub B (ponieważ są to jedyne punkty wspólne okręgów ω_1 i ω_2). Podobnie okrąg ω' musi przechodzić przez co najmniej jeden z każdej pary punktów spośród A, B, C i D. Stąd ω' przechodzi przez co najmniej trzy z tych punktów. To jest jednak niemożliwe, bo każda taka trójka wyznacza jednoznacznie jeden z okręgów ω_1, ω_2, ω_3, ω.



Poziom morza na Marsie

Lubię sobie wyobrażać, że w przyszłości na skolonizowanym przez Ziemian Marsie będzie można wybrać się na wycieczkę, np. trekking na górę Olimp równie łatwo jak obecnie w Tatry. Olimp (Olympus Mons) jest olbrzymim wygasłym wulkanem tarczowym o wysokości prawie 22 km ponad poziom morza. Jest zatem ponad dwukrotnie wyższy niż Mount Everest, a jego rozmiar u podstawy jest podobny do rozmiaru Polski.

Chwileczkę – mógłby tu zgłosić uwagę Czytelnik Trzeźwo Myślący – o ile mi dobrze wiadomo, na Marsie nie ma morza, więc w jaki sposób wyznacza się jego poziom? To dobre pytanie: poziom, od którego mierzy się na Marsie wysokości, jest w konkretny sposób *zdefiniowany*, a definicji było w historii badań Marsa co najmniej dwie.

W pierwszych latach pionierskich badań Marsa, od czasów sondy Mariner 9 do około 2001 roku, poziom marsjańskiego morza określał punkt potrójny wody. Jest to miejsce na diagramie fazowym, w którym lód, woda w stanie ciekłym i para wodna mogą współistnieć w równowadze termodynamicznej, w temperaturze nieco powyżej 0 °C (dokładnie 0,01 °C, czyli 273,16 K) i ciśnieniu 611,73 Pa. Rozumowanie naukowców było niezwykle proste: dla ciśnień mniejszych od krytycznego 611,73 Pa woda nie może istnieć w stanie ciekłym, zatem o istnieniu morza nie może też być mowy. Ciśnienie punktu potrójnego wody jest w przybliżeniu równe średniemu marsjańskiemu ciśnieniu atmosferycznemu przy powierzchni. Miejsca o ciśnieniu odpowiadającym właśnie ciśnieniu punktu potrójnego wody mogą więc odpowiadać powierzchni hipotetycznego oceanu. Definicja powierzchni określającej punkt zerowy marsjańskiej *areo*grafii za pomocą *aeroidu* (powierzchni wyznaczonej przez cechy atmosfery) wydaje mi się więc całkiem elegancka.

Druga, nowocześniejsza definicja używana po 2001 r., czyli od czasów misji Mars Orbitera (eksperyment MOLA, Mars Orbiter Laser Altimeter) do zdefiniowania poziomu morza używa nieco bardziej „przyziemnej” konwencji. Skoro wszystkie miejsca na powierzchni oceanu muszą mieć ten sam potencjał grawitacyjny (gdyby tak nie było, woda przepływałaby z miejsc o wyższej energii do miejsc o niższej energii), to za poziom odniesienia na powierzchni Marsa można przyjąć powierzchnię ekwipotencjalną odpowiadającą średniemu promieniowi równika (z uwzględnieniem poprawek związanych z rotacją Marsa).

Michał BEJGER

Na tytuł składają się słowa śp. Tadeusza Chrostka – kuglarza z Bytomia – mojego mistrza sztuk tajemnych.

Logarytm – logika i rytm?

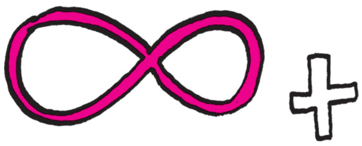
*Adam KOLANY**

Dodawanie jest łatwe. Każdy się z tym zgodzi. Ot, zapisujemy dodawane liczby jedna pod drugą, dodajemy kolejne cyfry, bacząc na przeniesienia i to wszystko. Gorzej jest z mnożeniem. Wyznaczenie iloczynu liczby n-cyfrowej przez liczbę m-cyfrową, gdzie $m > n$, wymaga co najmniej dodania n liczb o około $m + n$ cyfrach każda. Zajmuje to dużo miejsca, czasu. Łatwo się pomylić. Zastanówmy się zatem, czy nie dałoby się jakoś tak „zakodować” liczb, aby zamiast mnożyć liczby jako takie, dodawać ich kody, a następnie wynik odkodować, dostając iloczyn. Innymi słowy, pytamy o istnienie funkcji $\kappa\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która spełnia związek:

$$(*) \qquad \kappa(x \cdot y) = \kappa(x) + \kappa(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

*Pałac Młodzieży w Katowicach

No tak, ale już na pierwszy rzut oka widać, że jedyną taką funkcją jest funkcja stale równa zeru. Bo przecież $\kappa(x) + \kappa(0) = \kappa(x \cdot 0) = \kappa(0)$, skąd $\kappa(x) = 0$ dla dowolnego x.



Hmm... To może złagodźmy nieco nasze wymagania? Właściwie po co mamy kodować zero? W końcu wszyscy wiedzą, jak się przez nie mnoży? Więcej – wystarczy takie kodowanie znaleźć tylko dla liczb dodatnich – przecież wiemy, jak znak iloczynu zależy od znaków czynników.

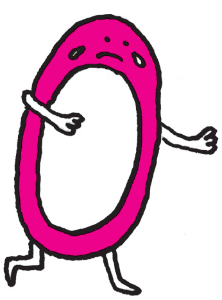
Tak więc szukamy funkcji $\kappa\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, która spełnia związek $(*)$ i która nie jest stale równa zeru. Więcej, szukać będziemy takiego κ, które jest ciągłe, czyli które dla bliskich wartości argumentów przyjmuje bliskie wartości i to w dodatku tak, aby dokładnością tego przybliżenia można było „sterować".

Bez założenia ciągłości równanie $(*)$ nie ma jednoznacznego rozwiązania. Dokładniej rzecz ujmując, istnieje nieprzeliczalnie wiele rozwiązań tego równania, wśród których dokładnie jedno jest ciągłe. Te nieciągłe są jednak bardzo paskudne.

Z warunku $(*)$ łatwo dostajemy

$(*_1)$ $\kappa\left(\frac{1}{x}\right) = -\kappa(x)$ dla $x > 0$, oraz
$(*_2)$ $\kappa(x^r) = r \cdot \kappa(x)$ dla $x > 0$ i $r \in \mathbb{N}$.

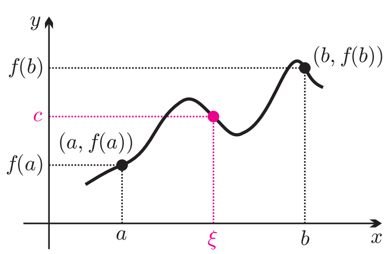
Wraz z warunkiem $(*_1)$ otrzymujemy, że $(*_2)$ zachodzi dla $x > 0$ oraz r całkowitych. Dalej, jeśli $r \in \mathbb{Q}$, to $r = \frac{k}{l}$ dla pewnych $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$, $l \neq 0$ i wówczas $k \cdot \kappa(x) = \kappa(x^k) = \kappa((x^{\frac{k}{l}})^l) = l \cdot \kappa(x^{\frac{k}{l}})$, skąd $\kappa(x^{\frac{k}{l}}) = \frac{k}{l} \cdot \kappa(x)$ dla $x > 0$. Czyli $(*_2)$ zachodzi dla $x > 0$ oraz r wymiernego. Ponieważ każdą liczbę niewymierną można z dowolną dokładnością przybliżać liczbami wymiernymi, postulowana wcześniej ciągłość funkcji κ pozwala wywnioskować, że równość $(*_2)$ zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej r.



Z założeń, jakie nałożyliśmy na κ, można łatwo wywnioskować, że $\kappa(1) = 0$. Zauważmy, że 1 jest jedyną taką liczbą, dla której κ się zeruje. Przypuśćmy bowiem, że dla pewnego $a \neq 1$ zachodzi $\kappa(a) = 0$. Niech dalej $x > 0$. Ponieważ funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$, $a \neq 1$ przyjmuje wszystkie dodatnie wartości, więc istnieje takie w, dla którego $a^w = x$. Stąd jednak $\kappa(x) = \kappa(a^w) = w \cdot \kappa(a) = 0$, co przeczy założeniom o κ.

Udowodniona właśnie obserwacja implikuje w prosty sposób różnowartościowość funkcji κ. Załóżmy bowiem, że $\kappa(x) = \kappa(y)$, wówczas $\kappa\left(\frac{x}{y}\right) = \kappa(x) - \kappa(y) = 0$, skąd właśnie $\frac{x}{y} = 1$, czyli $x = y$. Co więcej, jedyność miejsca zerowego funkcji κ wraz z ciągłością tej ostatniej (a dokładniej z faktem, że ma ona własność Darboux) implikuje monotoniczność tej funkcji. Niech bowiem $0 < x < y$ i $0 < z < v$. Wówczas dla $c_1 = \frac{y}{x}$, $c_2 = \frac{v}{z} > 1$ wartości $\kappa(c_1)$ i $\kappa(c_2)$ są tego samego znaku (inaczej jakieś c między c_1 i c_2 zerowałoby wartość κ, co nie jest możliwe). To zaś dowodzi, że bądź $\kappa(x) < \kappa(y)$, $\kappa(z) < \kappa(v)$, bądź $\kappa(v) < \kappa(z)$, $\kappa(y) < \kappa(x)$, co wobec dowolności x, y, v i z dowodzi monotoniczności κ.

Własność Darboux
Obraz przedziału jest przedziałem, czyli jeżeli funkcja f określona na przedziale przyjmuje dwie różne wartości $f(a)$ i $f(b)$ w punktach a i b swojej dziedziny, to przyjmuje także każdą wartość znajdującą się pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ w jakimś punkcie między a i b. Własność ta przysługuje funkcjom ciągłym, ale także pochodnym funkcji różniczkowalnych.



Założyliśmy, że κ nie jest stale równa zeru, co oznacza, że istnieje $c > 0$, dla którego $\kappa(c) \neq 0$. Ponieważ $\kappa\left(\frac{1}{c}\right) = -\kappa(c)$, jedna z liczb $\kappa(c)$ i $\kappa\left(\frac{1}{c}\right)$ jest dodatnia, a druga ujemna. Oczywiście, możemy bez straty ogólności założyć, że to właśnie $\kappa(c) > 0$. Teraz, skoro $\kappa(c) > 0$, istnieją takie wymierne α, β, dla których $\alpha \cdot \kappa(c) < 1$ oraz $\beta \cdot \kappa(c) > 1$, skąd $\kappa(c^\alpha) < 1 < \kappa(c^\beta)$. Ponieważ κ jest ciągła, spełnia ona własność Darboux, a stąd wynika, że istnieje taka wartość δ pomiędzy c^α oraz c^β, dla której $\kappa(\delta) = 1$. Zauważmy przy tym, że jeśli $\delta > 1$, to κ jest funkcją rosnącą, bo wówczas dla $x < y$, mamy $\frac{y}{x} > 1$, skąd wynika, że $\kappa\left(\frac{y}{x}\right)$ oraz $\kappa(\delta) = 1$ są tego samego znaku, czyli $\kappa(y) - \kappa(x) = \kappa\left(\frac{y}{x}\right) > 0$, co oznacza, że $\kappa(x) < \kappa(y)$.

Teraz właściwie wszystko staje się jasne. Niech bowiem $x > 0$, wówczas

$$\kappa(x) = \kappa(\delta) \cdot \kappa(x) = \kappa(\delta^{\kappa(x)}),$$

a stąd z różnowartościowości κ dostajemy $x = \delta^{\kappa(x)}$.

„Księgą kodów", służącą przekodowaniu czynników na składniki, jest tablica logarytmiczna, a „maszyną" do tego służącą – suwak logarytmiczny.

Innymi słowy, $\kappa(x)$ jest tą potęgą liczby δ, której wartością jest x. Taką liczbę nazywamy „*logarytmem z x przy podstawie δ*" i oznaczamy symbolem $\log_\delta(x)$. Ale przecież o tym wszyscy wiedzą – w końcu uczy się tego w szkołach...

PS. Serdecznie dziękuję dr. Tomaszowi Bielaczycowi za cenne uwagi, które przyspieszyły ukończenie tego tekstu.