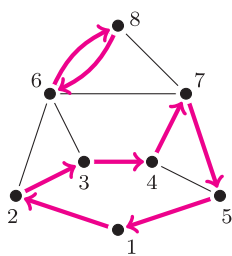


# Zliczamy skojarzenia (II). O planarności i algorytmie FKT

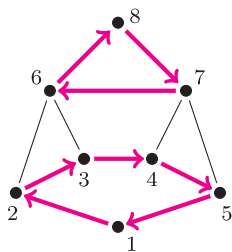
Tomasz IDZIASZEK

W pierwszej części tego artykułu pokazaliśmy, że dla szczególnej klasy grafów (kraty i ich podgrafy), istnieje działający w czasie wielomianowym algorytm, który wyznacza liczbę doskonałych skojarzeń dla dowolnego grafu z tej klasy. Ten wynik można uogólnić na szerszą klasę grafów – a konkretnie na grafy planarne, czyli takie, które można narysować na płaszczyźnie tak, by żadne z ich krawędzi się nie przecinały.

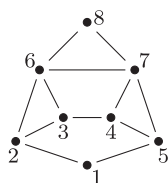
Mając dowolny nieskierowany graf planarny  $G$ , zawierający  $N$  wierzchołków  $v_1, \dots, v_N$ , rozważymy jego (symetryczną) macierz sąsiedztwa  $A = (a_{i,j})$  rozmiaru  $N \times N$ , w której  $a_{i,j} = 1$ , jeśli wierzchołki  $v_i$  oraz  $v_j$  są połączone krawędzią. Przykładowo, poniższy graf o ośmiu wierzchołkach, mający cztery doskonałe skojarzenia (dwa zawierające krawędź  $v_3v_4$  i dwa jej niezawierające), ma następującą macierz sąsiedztwa.



$$\pi_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 5)\ (6\ 8)$$



$$\pi_2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\ (6\ 8\ 7)$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podobnie jak w pierwszej części, naszym głównym narzędziem będzie obliczenie permanentu pewnej macierzy związanej z grafem, przy użyciu algorytmu liczenia wyznacznika jeszcze innej macierzy. Zarówno permanent, jak i wyznacznik, będą sumami iloczynów odpowiadających każdej permutacji wierzchołków grafu.

Na początek zastanówmy się zatem, jakiemu obiektowi w grafie  $G$  odpowiada permutacja wierzchołków  $\pi$ , dla której iloczyn  $\prod a_{i,\pi(i)}$  jest równy 1. Dla każdego czynnika  $a_{i,\pi(i)} = 1$  wyróżnimy w grafie skierowaną krawędź z wierzchołka  $v_i$  do wierzchołka  $v_{\pi(i)}$ . Ponieważ  $\pi$  jest permutacją, więc każdy z wierzchołków będzie miał wyróżnioną dokładnie jedną krawędź wychodzącą i dokładnie jedną wchodzącą. Zatem wyróżnione krawędzie będą tworzyły *skierowane pokrycie cyklowe* (rys. 1). Innymi słowy, permanent macierzy  $A$  będzie oznaczał ich liczbę:

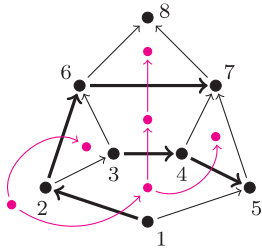
$$\text{liczba skierowanych pokryć cyklowych} = \text{perm}(A).$$

I w tym momencie to właśnie te pokrycia będą nas najbardziej interesowały (a dlaczego, to wyjaśni się pod koniec artykułu). W szczególności, pokażemy teraz ciekawą konstrukcję, która pozwoli nam policzyć te skierowane pokrycia cyklowe, które zawierają jedynie cykle długości parzystej.

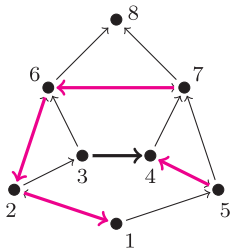
Zamiast symetrycznej macierzy  $A$  do reprezentowania grafu  $G$  możemy równie dobrze użyć antysymetrycznej macierzy  $A'$ , w której  $a_{i,j} = \pm 1$ , jeśli wierzchołki  $v_i$  oraz  $v_j$  są połączone krawędzią, oraz  $a_{i,j} = -a_{j,i}$  (dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że  $a_{i,j} = 1$  dla  $i < j$ ). Innymi słowy, każdej krawędzi  $v_i v_j$  przypisujemy *etykiety* 1 lub  $-1$ , którą będziemy „odczytywać”, przechodząc tą krawędzią z  $v_i$  do  $v_j$  (a przechodząc ją w odwrotnym kierunku, odczytamy etykietę przeciwną). Obchodząc dowolny cykl w grafie  $G$ , będziemy mnożyć etykiety jego krawędzi, uzyskując wkład, jaki daje ten cykl do iloczynu  $\prod a_{i,\pi(i)}$ . Oczywiście, jeśli przejdziemy taki cykl w odwrotnym kierunku, to jego wkład przemnoży się przez  $(-1)^s$ , gdzie  $s$  jest długością cyklu, w szczególności zmieni znak dla cyklu nieparzystej długości. Dla skierowanego pokrycia cyklowego odpowiadającego permutacji  $\pi$ , przez wkład pokrycia rozumiemy iloczyn wkładów wszystkich cykli, czyli po prostu  $\prod a_{i,\pi(i)}$ .

Pokażemy teraz, że można połączyć skierowane pokrycia cyklowe, które zawierają jakikolwiek cykl nieparzysty, w takie pary, że wkłady pokryć należących do każdej pary będą miały różne znaki. W tym celu ustawmy wszystkie skierowane cykle długości nieparzystej z grafu  $G$  w ciąg  $c_1, c_1^R, c_2, c_2^R, \dots$  (gdzie  $c^R$  oznacza ten sam cykl co  $c$ , tylko przeciwnie skierowany). Jeśli w pokryciu cyklowym  $c$  jest najmniejszym cyklem z ciągu, to sparujemy je z pokryciem cyklowym, w którym ten cykl zamienimy na  $c^R$ . Zauważmy, że parowanie jest poprawne oraz iloczyny  $\prod a_{i,\pi(i)}$  dla pokryć z każdej pary mają przeciwne znaki. Z tego wynika, że jeśli przesumujemy teraz te iloczyny dla wszystkich skierowanych pokryć cyklowych,

Rys. 1. Skierowane pokrycia cyklowe (wyróżnione strzałkami) w grafie  $G$  odpowiadające permutacjom  $\pi_1$  i  $\pi_2$ .



Rys. 2. Wierzchołki grafu dualnego grafu  $G$  oraz krawędzie jego drzewa rozpinającego  $T$  (wyróżnione kolorem) oraz krawędzie tnące grafu  $G$  (pogrubione).



Rys. 3. Aby każdy cykl ściany dostał parzystość 1, algorytm FKT zmienił skierowanie czterech spośród pięciu krawędzi tnących. Dzięki temu każdy cykl należący do skierowanego pokrycia parzystego ma parzystość 1. Ale nie każdy cykl parzysty ma tę własność, patrz np. cykl  $(1, 2, 3, 6, 7, 5)$ .

które zawierają jakikolwiek cykl nieparzysty, to suma ta wyniesie 0. Tak więc w przypadku macierzy antysymetrycznej  $A'$ , zarówno wartości  $\text{perm}(A')$ , jak i  $\det(A')$  nie zmieniają się, jeśli w sumowaniu opuścimy wszystkie permutacje zawierające jakikolwiek cykl nieparzysty.

Z cyklami parzystymi jest kłopot – choć wkład z odwróconego cyklu jest taki sam, jak dla oryginalnego, to istotnie zależy on od konkretnych etykiet. Dla skierowanego cyklu  $c$  oznaczymy przez  $p(c)$  parzystość liczby krawędzi, dla których odczytujemy etykietę  $-1$  (zatem wkład z tego cyklu jest równy 1, jeśli  $p(c)$  jest parzyste i  $-1$ , jeśli jest nieparzyste). Okazuje się, że w przypadku grafów planarnych jesteśmy w stanie w sposób wystarczający kontrolować liczbę  $p(c)$ .

Graf planarny  $G$  możemy narysować na płaszczyźnie tak, że żadne krawędzie nie będą się przecinały. Każda część płaszczyzny otoczona krawędziami to ściana grafu  $G$ . Z grafem tym możemy związać *graf dualny*, w którym mamy wierzchołki dla każdej ściany grafu  $G$ , oraz krawędzi, jeśli dwie ściany mają wspólną krawędź w  $G$ . W grafie dualnym wyróżnimy też dowolne ukorzenione drzewo rozpinające  $T$  (rys. 2), a w grafie  $G$  zbiór krawędzi, które przecinają  $T$  (nazwiemy je krawędziami *tnącymi*). Będziemy teraz zmieniać etykietowanie niektórych z krawędzi tnących. Zauważmy, że dowolna ściana grafu  $G$ , odpowiadająca pewnemu liściowi  $v$  drzewa  $T$ , ma dokładnie jedną krawędź tnącą. Zmieniając (albo nie) etykietowanie tej krawędzi, możemy wymusić dowolną parzystość wartości  $p(c)$  dla cyklu  $c$  otaczającego tę ścianę. Następnie usuwamy liść  $v$  z drzewa  $T$  i postępujemy rekurencyjnie, aż rozważymy wszystkie ściany. Powyższy algorytm (znany pod nazwą FKT od nazwisk jego twórców – Fisher, Kasteleyn i Temperley), pozwala nam wymusić dowolną parzystość  $p(c)$  krawędzi dla każdego cyklu  $c$  odpowiadającego ścianie grafu (rys. 3).

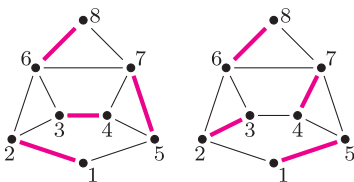
A jak to wpływa na parzystości pozostałych cykli? Łatwo wykazać, że jeśli mamy cykle  $c_1$  i  $c_2$  odpowiadające sąsiadującym ścianom grafu, to parzystość cyklu, który otacza obie te ściany, wynosi  $(p(c_1) + p(c_2) + k) \bmod 2$ , gdzie  $k$  jest liczbą krawędzi wspólnych dla obu tych ścian. Indukcyjnie można zatem wykazać, że cykl  $c$  otaczający ściany cykli  $c_1, c_2, \dots, c_s$  ma parzystość  $(p(c_1) + p(c_2) + \dots + p(c_s) + k) \bmod 2$ , gdzie  $k$  to liczba krawędzi leżących „wewnątrz” cyklu  $c$ . Wzór ten ma ciekawe konsekwencje, jeśli ustalimy parzystość każdej ze ścian na  $p(c_i) = 1$ . Wtedy parzystość cyklu  $c$  to  $(s + k) \bmod 2$ . Ale, używając wzoru Eulera, można wykazać, że liczba wierzchołków leżących „wewnątrz” cyklu  $c$  to  $k + 1 - s$ . W szczególności  $p(c) = 1$  wtedy, gdy liczba tych wierzchołków jest parzysta.

Cała ta karkołomna konstrukcja znajdzie zaraz swoje uzasadnienie. Zaczniemy od macierzy  $A'$ , a następnie wykonamy algorytm FKT tak, by parzystość cyklu każdej ściany wyniosła 1. Zdefiniujemy już ostatnią macierz antysymetryczną  $A''$ . Dla  $i < j$  i wierzchołków  $v_i, v_j$  połączonych krawędzią kładziemy  $a_{i,j} = -1$ , jeśli etykietowanie krawędzi zostało zmienione przez algorytm FKT, oraz  $a_{i,j} = 1$ , jeśli nie zostało (oczywiście  $a_{j,i} = -a_{i,j}$ ). Rozważmy teraz dowolny cykl  $c$  należący do pewnego pokrycia cyklowego cyklami parzystymi. Wszystkie wierzchołki leżące wewnątrz tego cyklu muszą być również pokryte pełnymi cyklami, zatem ich liczba musi być parzysta, więc  $p(c) = 1$ . Innymi słowy, iloczyn etykiet krawędzi z tego cyklu wynosi  $-1$ , niezależnie od wyboru tego cyklu. Tak więc znowu (tak jak w pierwszej części artykułu) udało nam się sprawić, że iloczyn  $\prod a_{i,\pi(i)}$  wszystkich cykli jest równy znakowi permutacji, więc możemy użyć algorytmu liczenia wyznacznika. Zatem

$$\text{liczba skierowanych pokryć cyklowych cyklami parzystymi} = \det(A'').$$

Pora na ostatnią sztuczkę. Rozważmy parę doskonałych skojarzeń w grafie i zaznaczmy naraz ich krawędzie. Ponieważ każdy wierzchołek będzie miał zaznaczone dokładnie dwie krawędzie, więc taki rysunek odpowiadać będzie pewnemu pokryciu cyklowemu cyklami parzystymi. Co więcej, każdy cykl długości większej niż 2 możemy skierować – powiedzmy, że kierujemy go w prawo dokładnie wtedy, gdy najmniejsza leksykograficznie krawędź pochodzi z pierwszego skojarzenia (rys. 4). Nietrudno się przekonać, że w ten sposób dostaniemy bijekcję między zbiorem uporządkowanych par doskonałych skojarzeń a zbiorem skierowanych pokryć cyklowych cyklami parzystymi (aby uzyskać z pokrycia parę skojarzeń, należy brać co drugą krawędź z każdego cyklu). Porównując licznosci tych zbiorów, dostajemy ostateczny wzór na liczbę doskonałych skojarzeń w grafie planarnym:

$$\text{liczba doskonałych skojarzeń} = \sqrt{\det(A'')}.$$



Rys. 4. Para skojarzeń, która odpowiada pierwszemu pokryciu cyklowemu z rysunku 1.