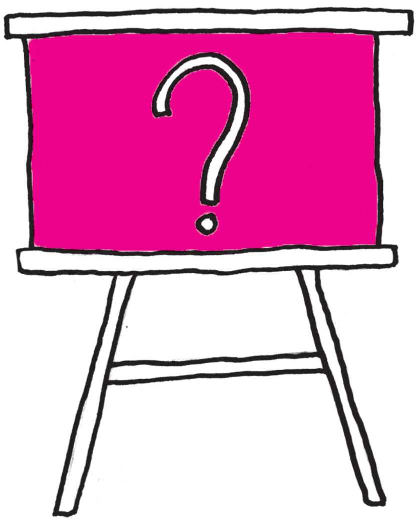
Czegóż to dawniej uczono na wykładach algebry

Dawno, dawno temu, ale nie tylko przed wiekami i nie tylko za górami, za lasami, ale również na naszych uczelniach, jakieś pół wieku temu, wykładano wiele ciekawych faktów matematycznych, o których nie śni się obecnie nie tylko filozofom, ale również młodym matematykom. W kolejnych numerach przypomnimy kilka takich ciekawostek.

Pierwiastki wielokrotne wielomianu

Rozważamy wielomian w stopnia n o współczynnikach rzeczywistych. Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu w, jeśli wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x - x_0$. Pierwiastek x_0 jest k-krotny (k jest pewną liczbą naturalną), jeśli wielomian w jest podzielny przez $(x - x_0)^k$, ale nie dzieli się przez $(x - x_0)^{k+1}$. Na przykład dla wielomianu $w = x^3(x + 2)^2(x - 1)$ pierwiastek $x_1 = 0$ jest trzykrotny, $x_2 = -2$ jest dwukrotny, $x_3 = 1$ jest jednokrotny.



Do badania krotności pierwiastków wielomianu wygodnie jest posłużyć się pochodną tego wielomianu. Na wykładzie algebry nie odwoływano się do definicji pochodnej znanej z analizy matematycznej, a określano pochodną jednomianu $a_k x^k$ w sposób formalny, jako $k \cdot a_k x^{k-1}$, pochodną jednomianu stopnia zero a_0 jako 0, a pochodną wielomianu będącego sumą jednomianów jako sumę pochodnych tych jednomianów. Na przykład

$$(3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 5x - 7)' = 12x^3 - 6x^2 + 8x + 5.$$

Można udowodnić, że pochodna określona w sposób formalny dla wielomianu ma wiele własności przysługujących pochodnej funkcji znanych z analizy matematycznej, w szczególności pochodna iloczynu wielomianów w i v spełnia związek $(w \cdot v)' = w' \cdot v + w \cdot v'$.

Twierdzenie. *Jeśli liczba jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu w, to jest pierwiastkiem $(k - 1)$-krotnym pochodnej w'.*

Dowód. Ponieważ x_0 jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu w, więc $w = (x - x_0)^k \cdot v$, przy czym $v(x_0) \neq 0$. Wobec tego

$$w' = k(x - x_0)^{k-1} \cdot v + (x - x_0)^k \cdot v' = (x - x_0)^{k-1}[k \cdot v + (x - x_0) \cdot v'].$$

Liczba x_0 nie jest pierwiastkiem wielomianu występującego w nawiasie kwadratowym, gdyż jest pierwiastkiem drugiego składnika, ale nie jest pierwiastkiem składnika pierwszego. Wynika stąd, że jest ona pierwiastkiem $(k - 1)$-krotnym pochodnej w'.

Wniosek 1. *Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy jest wspólnym pierwiastkiem tego wielomianu i jego pochodnej, a zatem jest pierwiastkiem największego wspólnego dzielnika* $\mathrm{NWD}(w, w')$.

Wniosek 2. *Dzieląc wielomian w przez* $\mathrm{NWD}(w, w')$, *otrzymamy wielomian mający te same pierwiastki, co wielomian w, ale wszystkie jednokrotne.*

Istotnie, jeśli x_0 jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu w, to jest pierwiastkiem $(k - 1)$-krotnym pochodnej w', jest więc też pierwiastkiem $(k - 1)$-krotnym wielomianu $\mathrm{NWD}(w, w')$. Dzielenie w przez $\mathrm{NWD}(w, w')$ możemy nazywać usuwaniem pierwiastków wielokrotnych.

Przykład. Usuniemy pierwiastki wielokrotne wielomianu

$$w = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4.$$

Obliczamy pochodną $w' = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12$. Aby obliczyć $\mathrm{NWD}(w, w')$, zastosujemy algorytm Euklidesa, zastępując wielomian w' proporcjonalnym do niego wielomianem $w^* = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2$. Najpierw dzielimy w przez w^* z resztą i dostajemy

$$x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = x \cdot (x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2) - 2(x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2),$$

a następnie dzielimy w^* przez $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$, otrzymując iloraz $x - 1$ i resztę 0. Wobec tego $\mathrm{NWD}(w, w') = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$. Po podzieleniu wielomianu w przez otrzymany wielomian stopnia 4 otrzymamy $x^2 - x - 2$, czyli $(x + 1)(x - 2)$. Zatem liczby -1 i 2 są pierwiastkami wielomianu w. Można łatwo sprawdzić, że -1 jest pierwiastkiem czterokrotnym, a 2 – pierwiastkiem dwukrotnym.

Maciej BRYŃSKI

Rozwiązanie zadania M 1477. Ponieważ $\mathrm{NWD}(a, b) \cdot \mathrm{NWW}(a, b) = ab$, to iloczyn P wszystkich wyrazów ciągu nie zmienia się po wykonaniu ruchu. W szczególności każdy z wyrazów ciągu jest ograniczony z góry przez P i ograniczony z dołu przez 1. Ponadto w każdym ruchu, modyfikującym pewne wyrazy o indeksach $i < j$, liczba a_j jest zamieniana na większą ($\mathrm{NWW}(a_i, a_j)$), liczba a_i zaś – na mniejszą ($\mathrm{NWD}(a_i, a_j)$). Żaden wyraz ciągu nie może być nieskończenie wiele razy zmniejszany (jako ograniczony z dołu przez 1) ani zwiększany (jako ograniczony z góry przez P). W takim razie każdy wyraz zostanie zmieniony skończenie wiele razy, czyli nie możemy wykonać nieskończenie wielu ruchów.