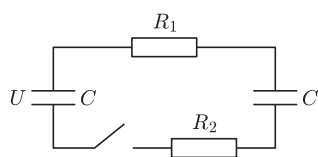
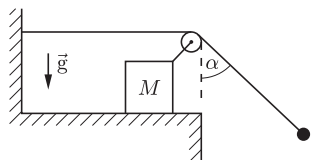


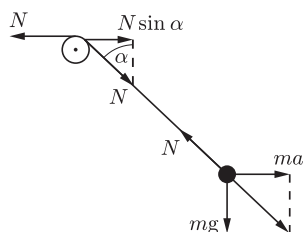
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2016



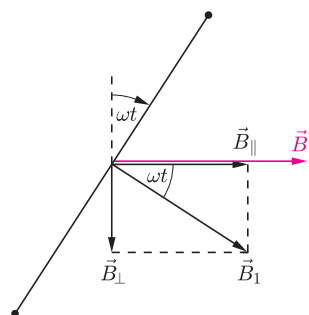
Rys. 1



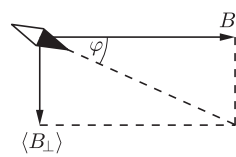
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 614, 615

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

614. Znaleźć ilość ciepła, jaka wydzielili się na każdym z oporników po zamknięciu klucza (rys. 1). Jeden z kondensatorów naładowany był początkowo do napięcia U , drugi nie był naładowany. Pojemności kondensatorów są jednakowe i równe C , wartości oporów wynoszą R_1 i R_2 .

615. Stosunek liczby zwojów w uzwojeniu wtórnym transformatora do liczby zwojów w uzwojeniu pierwotnym wynosi $n = 2$. Gdy do uzwojenia pierwotnego przyłożono napięcie przemiennie o amplitudzie $U_1 = 100$ V, amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym wynosiła $U_2 = 197$ V. Jaka będzie amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym, gdy rdzeń transformatora zastąpimy rdzeniem o tych samych wymiarach, ale wykonanym z materiału o przenikalności magnetycznej $k = 10$ razy mniejszej niż w pierwszym przypadku? Rozpraszanie strumienia magnetycznego oraz straty w rdzeniu możemy zaniedbać.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2015

Przypominamy treść zadań:

606. Klocek o masie M , do którego przymocowany jest nieważki, nieruchomy bloczek, może ślizgać się po poziomej powierzchni (rys. 2). Przez bloczek przerzucona jest nić, której jeden koniec jest poziomy i przymocowany do ściany, a na drugim końcu zawieszony jest ciężarek. W chwili początkowej ciężarek odchyliło od pionu o kąt α i puszczono. Znaleźć masę ciężarka, jeśli kąt odchylenia nici od pionu nie zmienia się podczas ruchu klocka. Tarcie zaniedbujemy.

607. Cienki miedziany pierścień o promieniu r może obracać się wokół pionowej osi, pokrywającej się z jego średnicą. W środku pierścienia umieszczono małą igiełkę magnetyczną, która może swobodnie obracać się wokół tej samej osi. Gdy pierścień jest nieruchomy, igiełka ustawia się wzdłuż składowej poziomej pola magnetycznego Ziemi B . Pierścień wprowadzono w bardzo szybki ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową ω . O jaki kąt odchyliła się igiełka od swego początkowego ustawienia? Opór pierścienia wynosi R .

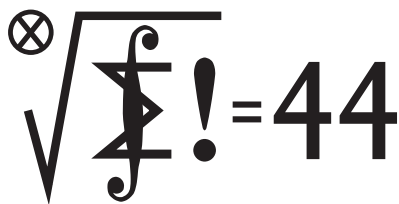
606. Równanie ruchu klocka ma postać: $Ma = N(1 - \sin \alpha)$, gdzie a jest przyspieszeniem klocka, a N siłą naprężenia nici. W układzie związanym z klockiem ciężarek porusza się z przyspieszeniem a wzdłuż prostej, która tworzy z pionem kąt α , pod działaniem sił przedstawionych na rysunku 3. Jego równanie ruchu ma postać: $ma = m\sqrt{a^2 + g^2} - N$. Zachodzi związek: $\tan \alpha = a/g$. Rozwiązując przedstawione równania, otrzymujemy masę ciężarka: $m = \frac{M \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)^2}$.

607. Podczas obrotu pierścienia zmienia się strumień pola magnetycznego Ziemi przez jego powierzchnię i w chwili t wynosi $\Phi = \pi r^2 B \cos \omega t$. W pierścieniu powstaje prąd indukcyjny o natężeniu $I = \frac{\pi r^2 B \omega}{R} \sin \omega t$. Prąd ten wytwarza pole magnetyczne, którego wektor indukcji w środku pierścienia jest prostopadły do płaszczyzny pierścienia, obraca się razem z pierścieniem i ma wartość $B_1 = \mu_0 \frac{I}{2r} = \mu_0 \frac{\pi r B \omega}{2R} \sin \omega t$. Igiełka magnetyczna ustawi się wzdłuż wypadkowego, uśrednionego w czasie pola magnetycznego. Aby je wyznaczyć, rozkładamy wektor B_1 na składowe – równoległą i prostopadłą do wektora B (rys. 4). Składowe mają wartości

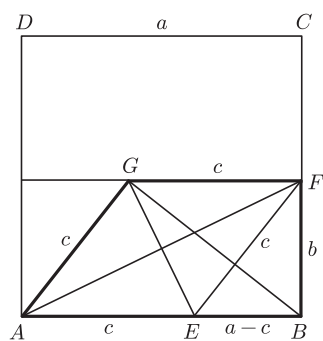
$$B_{\parallel} = B_1 \cos \omega t = \frac{\mu_0 \pi r B \omega}{4R} \sin 2\omega t, \quad B_{\perp} = B_1 \sin \omega t = \frac{\mu_0 \pi r B \omega}{4R} (1 - \cos 2\omega t).$$

Po uśrednieniu po czasie składowa równoległa znika, wartość średnia składowej prostopadłej wynosi $\langle B_{\perp} \rangle = \frac{\mu_0 \pi r B \omega}{4R}$. Igiełka magnetyczna odchyliła się od pierwotnego kierunku o kąt φ (rys. 5), gdzie $\tan \varphi = \frac{\langle B_{\perp} \rangle}{B} = \frac{\mu_0 \pi r \omega}{4R}$.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2016



Zadania z matematyki nr 717, 718

Redaguje Marcin E. KUCZMA

717. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|\sphericalangle BCA| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$. Odcinek CD (o końcu $D \in AB$) jest dwusieczną kąta BCA . Punkt S jest środkiem okręgu, stycznego zewnętrznie do okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD oraz stycznego do półprostej CA^- . Udowodnić, że proste AB i CS są prostopadłe.

718. Dowieść, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d zachodzi równość

$$[a, b, c, d] = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{(a, b, c, d)} \cdot \frac{(a, b, c) \cdot (a, b, d) \cdot (a, c, d) \cdot (b, c, d)}{(a, b) \cdot (a, c) \cdot (a, d) \cdot (b, c) \cdot (b, d) \cdot (c, d)}.$$

Nawias kwadratowy oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność, zaś nawias okrągły – największy wspólny dzielnik liczb ujętych w ów nawias.

Zadanie 718 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2015

Przypominamy treść zadań:

709. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ leżą (odpowiednio) takie punkty E i F , zaś wewnątrz tego kwadratu znajduje się taki punkt G , że $FG \perp BC$, $EF \perp BG$, $EG \perp AF$, $BG \perp AG$. Sporządzony odrębnie rysunek sugeruje, że trapez $ABFG$ pokrywa około 40% powierzchni kwadratu $ABCD$. Czy jest to równość dokładna?

710. Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym: $a_{n+1} = a_n + \ln a_n$; wyraz początkowy a_0 jest dowolną liczbą większą od 1. Udowodnić, że ciąg (a_n) jest asymptotycznie równy ciągowi (b_n) o wyrazach $b_n = n \ln n$; to znaczy, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$.

709. Nie – ale niewiele brakuje. Oznaczmy: $|AB| = a$, $|BF| = b$, $|AE| = c$. Z podanych warunków wynika, że czworokąt $AEBFG$ jest równoległobokiem o przekątnych prostopadłych, czyli rombem. Trójkąty EBF i AGB są podobne. Stąd $|EB| : |EF| = |AG| : |AB|$, czyli $(a - c)/c = c/a$. Z tego równania wyznaczamy $c = a(\sqrt{5} - 1)/2$. Z trójkąta prostokątnego EBF dostajemy $b^2 = c^2 - (a - c)^2 = a^2(\sqrt{5} - 2)$. Pole trapezu $ABFG$ wynosi $b(a + c)/2 = ka^2$, gdzie $k = \sqrt{\sqrt{5} - 2}(\sqrt{5} + 1)/4 \in (0,39; 0,40)$.

710. Będziemy korzystać – podobnie, jak w rozwiązaniach zadań 654 i 662 (*Delta* 5/2013, 9/2013) – z twierdzenia Stolza, które mówi, że jeśli (y_n) jest ciągiem rosnącym do nieskończoności, wówczas równość

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

zachodzi dla każdego ciągu (x_n) , dla którego granica po prawej stronie istnieje. Ponieważ $b_n = n \ln n \rightarrow \infty$ rosnąco, twierdzenie ma szansę zadziałać – warto zająć się ciągiem o wyrazach c_n/d_n , gdzie

$$c_n = a_{n+1} - a_n = \ln a_n, \\ d_n = b_{n+1} - b_n = \lambda_n + \ln(n+1), \quad \lambda_n := n \ln \frac{n+1}{n}.$$

Jeśli wykażemy, że $c_n/d_n \rightarrow 1$, wzór (1) (dla $x_n = a_n$, $y_n = b_n$) da wynik $a_n/b_n \rightarrow 1$ i zakończy rozwiązanie.

Ponownie użyjemy twierdzenia (1) (dla $x_n = c_n$, $y_n = d_n$); ciąg $\lambda_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący, więc $d_n \rightarrow \infty$ rosnąco. Chcemy dowieść, że liczba 1 jest granicą ciągu o wyrazach

$$(2) \quad \frac{c_{n+1} - c_n}{d_{n+1} - d_n} = \frac{\ln(a_n + c_n) - \ln a_n}{(\lambda_{n+1} + \ln(n+2)) - (\lambda_n + \ln(n+1))} = \\ = \frac{\ln\left(1 + \frac{c_n}{a_n}\right)}{(\lambda_{n+1} - \lambda_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}.$$

Wszystkie liczby a_n są większe od 1 (oczywista indukcja); ich logarytmy są dodatnie, wobec czego ciąg (a_n) jest rosnący – ma zatem granicę (skończoną lub nie). Granica skończona musiałaby być liczbą $g > 1$, spełniającą równanie $g + \ln g = g$, co nie jest możliwe. Tak więc $a_n \rightarrow \infty$; co za tym idzie, $c_n/a_n = (\ln a_n)/a_n \rightarrow 0$. Korzystając

ze znanej relacji granicznej $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, możemy teraz napisać

$$\ln\left(1 + \frac{c_n}{a_n}\right) = \gamma_n \cdot \frac{c_n}{a_n}, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \delta_n \cdot \frac{1}{n+1},$$

gdzie $\gamma_n \rightarrow 1$, $\delta_n \rightarrow 1$, i przepisać wyrażenie (2) w postaci

$$(3) \quad \frac{c_{n+1} - c_n}{d_{n+1} - d_n} = \frac{\gamma_n}{(n+1)(\lambda_{n+1} - \lambda_n) + \delta_n} \cdot \frac{(n+1)c_n}{a_n}.$$

Z nieco bardziej subtelnej relacji granicznej $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ (przy $t \rightarrow 0$) możemy wywnioskować, że

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ = -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

a stąd $(n+1)(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \rightarrow 0$. Zatem cały pierwszy czynnik iloczynu po prawej stronie wzoru (3) dąży do 1. Pozostaje dowieść, że drugi czynnik też – czyli że

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n/c_n}{n+1} = 1.$$

Jeszcze raz skorzystamy ze wzoru Stolza (1), tym razem biorąc $x_n = a_n/c_n$, $y_n = n+1$. Granica po lewej stronie (4) będzie równa granicy $\lim(x_{n+1} - x_n)$, jeśli ta ostatnia istnieje. Skoro $c_{n+1} = c_n + \ln(1 + (c_n/a_n)) = c_n(1 + \gamma_n/a_n)$, zatem

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n + c_n}{c_n(1 + \gamma_n/a_n)} - \frac{a_n}{c_n} = \\ = \frac{1 - \gamma_n/c_n}{1 + \gamma_n/a_n} \rightarrow 1$$

(bo $\gamma_n \rightarrow 1$, $a_n \rightarrow \infty$, $c_n \rightarrow \infty$). To dowodzi słuszności tezy (4), więc i tezy zadania.