Dowiedliśmy zatem, iż każdy pierwiastek wielomianu $P(x)$ jest równy $-A$. Skoro wielomian $P(x)$ jest unormowany, to w takim razie $P(x) = (x + A)^m$. W tym momencie teza zadania staje się ewidentna:

$$(x_1 + A)^m = P(x_1) = 2.$$

Liczba 2 jest m-tą potęga liczby całkowitej tylko dla $m = 1$. Wielomian $P(x)$ jest więc wielomianem liniowym i rozwiązanie jest zakończone.

W ten sposób dotarliśmy do końca cyklu. Żywimy nadzieję, że ukazał on korzyści płynące z zachowania otwartości umysłu na niecodzienne pomysły. Podobnie jak odwagi do podążania niekoniecznie najbardziej narzucającą się drogą. Któż bowiem wie, co ciekawego może nas na niej spotkać?

Metody, które Czytelnik miał okazję spotkać w powyższych przykładach, może wykorzystać w dwóch zadaniach do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5. *Liczby całkowite a i b spełniają następujący warunek: dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $a \cdot 2^n + b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnić, że $a = 0$.*

Podpowiedź. Niech x_n będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że $a \cdot 2^n + b = x_n^2$. Rozważ ciąg $(2x_n - x_{n+2})_{n\geqslant 1}$.

Zadanie 6. *Dany jest rosnący ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ liczb całkowitych, który spełnia warunek $a_n \leqslant 1000n$. Wykazać, że w ciągu istnieje nieskończenie wiele wyrazów, które w zapisie dziesiętnym mają co najmniej 2015 kolejnych cyfr równych 1.*

Podpowiedź. Niech S będzie zbiorem liczb, które w zapisie dziesiętnym nie mają ciągu 2015 kolejnych cyfr równych 1. Udowodnij, że szereg $\sum_{x\in S} \frac{1}{x}$ jest zbieżny. Oszacuj w tym celu od góry liczbę liczb n cyfrowych w zbiorze S.

Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

M 1486. Dane są takie liczby całkowite dodatnie $n > m$, że liczby $n^7 - m^7$ oraz $n^3 - m^3$ są względnie pierwsze. Wykaż, że liczby $n^2 - m^2$ i $n^3 - m^3$ są również względnie pierwsze.
Rozwiązanie na str. 2

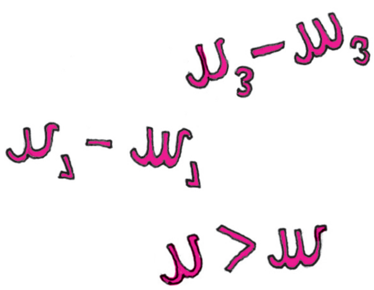
M 1487. W trójkąt ABC wpisany jest okrąg o promieniu r. Proste styczne do okręgu i równoległe do boków trójkąta odcinają od niego trzy trójkąty. Wykaż, że suma promieni okręgów wpisanych w te trzy trójkąty jest równa r.
Rozwiązanie na str. 5

M 1488. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby naturalne n_1, n_2, n_3, n_4, wszystkie większe od 2016, spełniające równanie

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = n_1n_2n_3 + n_1n_2n_4 + n_1n_3n_4 + n_2n_3n_4.$$

Rozwiązanie na str. 15

Przygotował Andrzej MAJHOFER



F 899. Bezpośredni pomiar energii kinetycznej poruszającego się swobodnie elektronu dał wynik $E = (1000 \pm 0{,}1)$ eV – tzn. pomiar wykonano z dokładnością do $\Delta E = 0{,}1$ eV. Wyznacz stosunek dokładności określenia położenia (współrzędnej x w kierunku ruchu) elektronu do długości jego fali de Broglie'a bezpośrednio po tym pomiarze.
Rozwiązanie na str. 1

F 900. Do wykonania doświadczenia Younga z molekułami – tj. obserwacji prążków interferencyjnych po przejściu wiązki przez układ równoległych, równoodległych szczelin – potrzebna jest odpowiednio przygotowana wiązka molekuł. Powinna to być wiązka identycznych molekuł poruszających się równolegle w kierunku układu szczelin z jednakowymi prędkościami. Jak duży jest dopuszczalny rozrzut Δv prędkości molekuł w wiązce, jeśli chcemy zaobserwować wyraźne prążki do rzędu n?

Rozrzut Δv prędkości v w wiązce o średniej prędkości v_0 określają nierówności $v_0 - \Delta v < v < v_0 + \Delta v$.
Rozwiązanie na str. 15