Czy każdy niezerowy kwaternion ma element odwrotny? Dla liczb zespolonych pomogło rozważenie iloczynu $(c+di)(c-di)$. Tu postąpimy podobnie; gdy uważnie wykonamy mnożenie, otrzymamy

$$(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) \cdot (x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \in \mathbb{R}.$$

Gdy x jest kwaternionem niezerowym, tj. gdy choć jedna z liczb x_i jest różna od zera, suma po prawej stronie jest niezerowa. Gdy wszystkie współczynniki drugiego czynnika w powyższym iloczynie podzielimy przez tę sumę, uzyskamy postać poszukiwanego elementu x^{-1}. Zatem $\mathbb{H}$ jest naprawdę ciałem, tyle że nieprzemiennym.

Hamilton zauważył też, że – przy interpretacji liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny – ich działania „obywają się" bez liczby i. Mamy bowiem dla $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Wzory te, jak zauważył później Artur Cayley, dają się zinterpretować także jako opisujące działania na kwaternionach. Spostrzegł bowiem, wykorzystując równość $2 \cdot 2 = 4$, że możemy kwaterniony traktować jak pary liczb zespolonych. Wówczas dla $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C}$ mamy

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - b\overline{d},\ ad + b\overline{c}),$$

gdzie $\overline{x+yi}$ oznacza $x - yi$.

A co w takim razie z wyjściowym celem, jakim było wyrażenie obrotów przestrzeni trójwymiarowej za pomocą mnożenia w odpowiednim ciele? Otóż ten cel też udaje się zrealizować w następujący sposób. Umieśćmy naszą przestrzeń trójwymiarową wewnątrz $\mathbb{H}$, na ostatnich trzech osiach, tj. jako zbiór „czysto urojonych" kwaternionów $x_2 i + x_3 j + x_4 k$. Niech $u_2 i + u_3 j + u_4 k$ będzie wektorem długości 1, wskazującym oś obrotu, który chcemy zrealizować oraz niech θ będzie kątem, o jaki chcemy obrócić przestrzeń. Rozważmy kwaternion

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot (u_2 i + u_3 j + u_4 k) \in \mathbb{H}$$

oraz przekształcenie $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dane wzorem $x \mapsto q \cdot x \cdot q^{-1}$. Łatwo zauważyć, że prosta rozpięta przez wektor $x = u_2 i + u_3 j + u_4 k$ nie poruszy się. Okazuje się, że przekształcenie to przeprowadza czysto urojoną podprzestrzeń na siebie i wykonuje na niej dokładnie ten obrót, który sobie zaplanowaliśmy.

Wobec tego każdy obrót przestrzeni trójwymiarowej potrafimy zakodować za pomocą czwórki liczb rzeczywistych. Jest to na tyle efektywne, że kwaterniony znajdują zastosowanie w grafice komputerowej, do kodowania szybkich animacji.

Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

M 1507. Ciąg a_n spełnia warunek

$$a_{n+3} = -a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$$

dla dowolnej liczby naturalnej n. Znaleźć wartość a_{2016}, wiedząc, że $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ i $a_3 = 2$.
Rozwiązanie na str. 17

M 1508. Czworokąt wypukły $ABCD$ o obwodzie p został podzielony przekątnymi na cztery trójkąty. Środki okręgów wpisanych w te trójkąty tworzą czworokąt o obwodzie q. Wykazać, że pole S czworokąta $ABCD$ jest mniejsze niż $pq/4$.
Rozwiązanie na str. 4

M 1509. Obliczyć sumę

$$\sum_{x=1}^{10} \sum_{y=1}^{10} \sum_{z=1}^{10} \min(x,y,z).$$

Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Michał NAWROCKI

F 913. Maleńką metalową kulkę o masie $m = 1$ g, którą naładowano ładunkiem $q = +10^{-7}$C, wystrzelono z dużej odległości z prędkością $v = 1$ m/s w kierunku metalowej sfery, naładowanej ładunkiem $Q = +3 \cdot 10^{-7}$C. Przy jakim najmniejszym promieniu sfery kulka dotrze do jej powierzchni?
Rozwiązanie na str. 6

F 914. W komorze napylarki płytka szklana jest pokrywana rozpylonym srebrem. Z jaką szybkością następowałby wzrost grubości d napylanej warstwy, jeżeli atomy srebra miałyby energię $W = 10^{-12}$ J każdy i wytwarzałyby na powierzchni płytki ciśnienie $p = 0{,}1$ N/m^2? Gęstość srebra wynosi $\rho = 10{,}5$ g/cm^3, a jego masa atomowa wynosi $\mu = 108$.
Rozwiązanie na str. 15