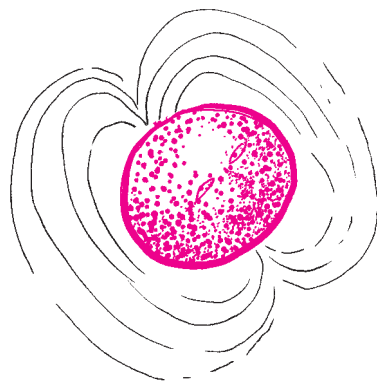


Newtonowskie intuicje dla fal grawitacyjnych

Michał BEJGER

Masy zakrzywiają czasoprzestrzeń,
czasoprzestrzeń wpływa na ruch mas.
John A. Wheeler

Obraz ten należy porównać z grawitacją newtonowską – absolutną, euklidesową przestrzenią, w której na masywne ciała działa natychmiastowa siła.



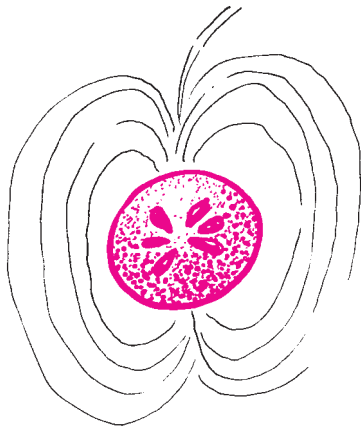
Statyczny rozkład ładunków (w przypadku elektromagnetyzmu) lub mas (w przypadku grawitacji) nie jest źródłem promieniowania. Dla przykładu, radialna zależność pola elektromagnetycznego dla statycznego 2^l -pola to $1/r^{2+l}$, czyli już dla rozkładu monopolowego ($l = 0$) zanika zbyt szybko.

Zmiany momentów monopolowego $M = \int \rho(\mathbf{r})d^3x$ oraz dipolowego mas $P_i = \int \rho(\mathbf{r})x_i d^3x$ nie prowadzą do emisji fal grawitacyjnych. Zmienność elektrycznego momentu dipolowego $P_i^e = \int \rho^e(\mathbf{r})x_i d^3x$ nie jest ograniczona zasadami zachowania, dlatego dominującym składnikiem promieniowania elektromagnetycznego jest promieniowanie dipolowe.

Według ogólnej teorii względności grawitacja jest skutkiem zakrzywiania się czterowymiarowej czasoprzestrzeni wokół masywnych obiektów. Mniej masywne ciała poruszają się wokół bardziej masywnych po liniach geodezyjnych (liniach „najprostszych” w zakrzywionej przestrzeni), co np. w przypadku planet w Układzie Słonecznym daje wrażenie ruchu po orbitach eliptycznych. Na swobodnie poruszające się ciała nie działa żadna siła: ich trajektorie są wynikiem geometrii. Dodatkowo, ogólna teoria względności ma wbudowane ograniczenie prędkości. Wszelkie informacje o zmianie krzywizny rozprzestrzeniają się z prędkością światła. O zmianach tych można myśleć jak o zmiennej w czasie odległości czasoprzestrzennej pomiędzy zdarzeniami. Odległość ta, czyli czterowymiarowy interwał ds definiuje się, używając tensora metrycznego $g_{\alpha\beta}$, $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ (zakres $\alpha, \beta = 0, \dots, 3$ odpowiada jednemu wymiarowi czasowemu i trzem przestrzennym, a powtarzające się indeksy oznaczają sumowanie w tym zakresie). Składowe $g_{\alpha\beta}$ w ogólnym przypadku mogą mieć skomplikowaną postać zależną od rozmieszczenia zakrzywiających czasoprzestrzeni mas. Dla ilustracji rozważmy przypadek pustej czasoprzestrzeni (czasoprzestrzeni Minkowskiego, z dala od jakichkolwiek mas), z dodanym drobnym zaburzeniem. Interwał czasoprzestrzenny jest wtedy równy $ds^2 = (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})dx^\alpha dx^\beta$, gdzie $\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -cdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ jest czterowymiarową „odległością” w pustej przestrzeni, a $h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ jej niewielkim zaburzeniem. Wkrótce po ogłoszeniu ogólnej teorii względności, w 1916 roku Albert Einstein stwierdził, że w przypadku przedstawionym powyżej jego równania przyjmują postać równania falowego, którego rozwiązaniem jest owo małe zaburzenie h : fala grawitacyjna. Ma ono parę cech podobnych do fal elektromagnetycznych: ma charakter fali poprzecznej i ma (dwie) niezależne polaryzacje. Przez następne kilkadziesiąt lat istniała poważna kontrowersja, czy rozwiązaniom tym odpowiada zjawisko fizyczne, czy raczej są efektem doboru współrzędnych. Kontrowersja została rozwiana na przełomie lat 50. i 60. przez Feliksa Piraniego, Hermana Bondiego, Ivora Robinsona i Andrzeja Trautmana na korzyść prawdziwości hipotezy fal grawitacyjnych.

Realne promieniowanie jest związane z transportem energii; w szczególności fale powinny móc przenosić energię od źródła do nieskończoności. Jeśli amplituda pola związanego z (dla uproszczenia) sferyczną falą w odległości r od źródła jest równa $h(r)$, to strumień energii przez sferyczną powierzchnię wynosi $F(r) \propto h^2(r)$, a całkowita moc promieniowania (jasność) jest proporcjonalna do $L(r) \propto 4\pi r^2 h^2(r)$. Jako że energia musi być zachowana, amplituda $h(r)$ musi maleć z odległością jak $1/r$. W przypadku detektorów fal grawitacyjnych typu laserowych interferometrów Advanced LIGO i Advanced Virgo, które mierzą właśnie amplitudę fali h , mierzona jest względna różnica różnic długości prostopadłych ramion interferometru, $h = \Delta L_x - \Delta L_y = \Delta L/L$, gdzie L jest długością ramienia (więcej szczegółów w artykule Izzy Kowalskiej w *Delcie* 10/2010). Zależność h od odwrotności odległości przekłada się na daleko większy zasięg w porównaniu do tradycyjnych metod obserwacji, w których wartością mierzoną jest energia proporcjonalna do h^2 . Poprawa czułości o rząd wielkości oznacza dziesięciokrotnie dalszy zasięg w porównaniu do około trzykrotnie większego zasięgu np. teleskopów optycznych.

Przez analogię do elektromagnetyzmu, w którym promieniowanie elektromagnetyczne jest skutkiem przyspieszonego ruchu ładunków elektrycznych, źródłem promieniowania grawitacyjnego powinien być przyspieszony ruch mas. Do promieniowania nie wystarczy jednak samo istnienie ładunku (masy). Dla układu mas opisanego rozkładem gęstości $\rho(\mathbf{r})$, gdzie $|\mathbf{r}|$ to radialna odległość od początku układu odniesienia (np. środka masy), najprostszym momentem rozkładu jest monopol M , który jest po prostu całkowitą masą-energiją układu. Jego zmiana oznaczałaby nieprzebranie zasady zachowania masy-energii. Również zmienny moment dipolowy mas P_i



$$G = 6,67408 \cdot 10^{-11} \text{ [m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}\text{]},$$

$$c = 299\,792\,458 \text{ [ms}^{-1}\text{]}.$$

Orbitalna prędkość obrotowa ω wiąże się z parametrami orbity poprzez trzecie prawo Keplera,

$$GM = \omega^2 a^3,$$

gdzie $M = m_1 + m_2$ jest całkowitą masą układu. Równanie biegunowe orbity eliptycznej ma postać

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta},$$

gdzie a to półosć wielka, a e to ekscentryczność orbity. Gdy $e = 0$ (orbita jest kołem), to $r = a$.

Jeśli przyjmiemy, że orbita układu znajduje się w płaszczyźnie xy , to

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mu a}{m_1} \times (\cos \theta, \sin \theta, 0),$$

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{\mu a}{m_2} \times (\cos \theta, \sin \theta, 0),$$

gdzie $\theta = \omega t$ jest współrzędną kątową określającą położenie ciał. Niezerowe składowe macierzy tensora I_{ij} będą następujące:

$$I_{xx} = \frac{\mu a^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)),$$

$$I_{yy} = \frac{\mu a^2}{2} (1 - \cos(2\omega t)),$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \frac{\mu a^2}{2} \sin(2\omega t).$$

Charakterystyczną częstotliwością promieniowania fal grawitacyjnych układu podwójnego jest zatem 2ω .

nie może być źródłem promieniowania grawitacyjnego, ponieważ z definicji odpowiada środkowi masy układu; zmienność oznaczałaby złamanie zasady zachowania pędu. Najniższym „promieniującym” multipolem w teorii grawitacji jest zatem kwadrupol, $I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}) x_i x_j d^3x$, z którym nie wiążą się żadne zasady zachowania. Powyższe rozważania oznaczają, że sferyczny symetryczny ruch mas, np. kolaps albo eksplozja, nie wywołuje emisji fal grawitacyjnych. To samo dotyczy osiowo symetrycznej rotującej gwiazdy. Dobrymi źródłami fal są natomiast niesferyczne wybuchy supernowych, rotujące zdeformowane gwiazdy neutronowe oraz układy podwójne gwiazd lub czarnych dziur.

Wielkość amplitudy fali grawitacyjnej h można oszacować za pomocą analizy wymiarowej. Z definicji h jest wielkością bezwymiarową i, jak wynika z powyższych rozważań, odwrotnie proporcjonalną do odległości od źródła. Powinna też być związana z momentem kwadrupolowym, którego jednostki to $[\text{kgm}^2]$. Wiemy także, że w wyrażeniu powinna pojawić się druga pochodna, odpowiadająca przyspieszonemu ruchowi mas, niech zatem $h \propto (1/r) \partial^2(MR^2)/\partial t^2$. Jednostki tego wyrażenia to $[\text{kgms}^{-2}]$. By dostać wielkość bezwymiarową, należy odpowiednio dobrać potęgi stałych fizycznych występujące w problemie: stałą grawitacji G oraz prędkość światła c . Bezwymiarowe h otrzymamy dla współczynnika proporcjonalności równego G/c^4 . Jest to bardzo mała liczba, $8,26244528 \cdot 10^{-45} \text{ [m}^{-1}\text{kg}^{-1}\text{s}^2\text{]}$, co oznacza, że źródłami fal o dużej amplitudzie mogą być tylko szybko poruszające się, masywne ciała. Rozważmy układ podwójny mas m_1 i m_2 oddalonych o a (separacji a) na orbicie kołowej. Oszacowanie h można przepisać dla takiego układu, zamieniając MR^2 na μa^2 i przyjmując, że M jest całkowitą, a $\mu = (m_1 m_2)/M$ zredukowaną masą układu. Można też przyjąć, że druga pochodna $\partial^2/\partial t^2$ jest proporcjonalna do orbitalnej prędkości obrotowej ω^2 . Korzystając z trzeciego prawa Keplera (patrz obok), dostaniemy

$$h \simeq \frac{G^2}{c^4} \frac{1}{r} \frac{M\mu}{a} = \frac{G^{5/3}}{c^4} \frac{1}{r} M^{2/3} \mu \omega^{2/3}.$$

Dla przykładu, rząd wielkości h w przypadku dwóch gwiazd neutronowych o podobnych masach ($m_1 = m_2 \approx 1,4 M_\odot$, $M^{2/3} \mu = M^{5/3}/4$) jest następujący:

$$h \approx 10^{-22} \left(\frac{100 \text{ Mpc}}{r} \right) \left(\frac{f}{100 \text{ Hz}} \right)^{2/3} \left(\frac{M}{2,8 M_\odot} \right)^{5/3}.$$

Charakterystyczna względna amplituda $h = \Delta L/L = 10^{-22}$ odpowiada pomiarowi odległości Słońce-Saturn z dokładnością do rozmiaru atomu! Używając argumentów newtonowskich, dostaliśmy *przybliżenie kwadrupolowe* amplitudy h , poprawne dla układów, w których prędkości nie są bliskie prędkości światła. Po raz pierwszy sformułował je w 1918 roku Albert Einstein:

$$h_{ij} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij}$$

(dwie kropki oznaczają drugą pochodną względem czasu). Amplituda h jest więc bezpośrednio związana z niesymetryczną częścią energii kinetycznej układu: $h \propto E_{\text{kin}}^{\text{nsym}}/r$. Z powyższego i notki na marginesie widać też, że h jest proporcjonalna do momentu kwadrupolowego ($I \propto \mu a^2$) oraz ω^2 . Z rozważań o strumieniu energii wiemy natomiast, że jasność układu (moc promieniowania fal) L jest funkcją $h^2 \propto I^2$, oraz ω w pewnej potędze. Używając analizy wymiarowej (o której więcej napiszemy w następnym numerze), dostajemy

$$L = \frac{dE_{\text{GW}}}{dt} \propto \frac{G}{c^5} I^2 \omega^6 \propto \frac{c^5}{G} \left(\frac{R_s}{a} \right)^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6,$$

gdzie E_{GW} jest energią fali grawitacyjnej, $R_s = 2GM/c^2$ jest promieniem Schwarzschilda czarnej dziury o masie M , a $v = \omega a$ jest prędkością liniową masy M na orbicie o promieniu a . Czynniki proporcjonalności wynosi 32/5. Druga wersja równania pokazuje dobitnie, że moc emitowana przez układ podwójny o rozmiarze porównywalnym z R_s i orbitującym z prędkością bliską prędkości światła jest ogromna: czynnik c^5/G wynosi $3,9 \cdot 10^{52} \text{ W}$. Dla porównania zwyczajne układy podwójne są bardzo słabymi źródłami fal. Układ Ziemia-Słońce emituje około 200 W (całkowita emisja elektromagnetyczna Słońca to około $4 \cdot 10^{26} \text{ W}$).

Fale emitowane są na koszt zmniejszania orbitalnej energii układu, $E_{\text{orb}} = -Gm_1m_2/(2a)$. Porównanie zmiany E_{orb} i E_{GW} daje

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} \equiv \frac{Gm_1m_2}{2a^2} \dot{a} = -\frac{dE_{\text{GW}}}{dt}.$$

Używając trzeciego prawa Keplera oraz wynikającej z niego pochodnej $\dot{a} = -2a\dot{\omega}/(3\omega)$, można otrzymać zależność między masami składników oraz orbitalną prędkością obrotową i jej pochodną:

$$\dot{\omega}^3 = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2 = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mathcal{M}^5.$$

Kombinację mas $\mathcal{M} = (\mu^3 M^2)^{1/5} = (m_1 m_2)^{3/5} / (m_1 + m_2)^{1/5}$ nazywa się *masą ćwierku* przez analogię do podobnego w charakterze zachowania się częstotliwości i amplitudy odgłosu ptaków; prędkość orbitalna oraz amplituda rośnie ($h \propto \mathcal{M}^{5/3} \omega^{2/3}$), podczas gdy separacja układu a maleje. Masę ćwierku \mathcal{M} można obliczyć wprost z częstotliwości fal grawitacyjnych f_{GW} (o częstotliwości dwukrotnie większej niż orbitalna, $2\pi f_{\text{GW}} = 2\omega$) w detektorze:

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f_{\text{GW}}^{-11/3} \dot{f}_{\text{GW}} \right)^{3/5}.$$

W połączeniu z również mierzoną bezpośrednio przez detektor amplitudą h masę ćwierku można wykorzystać do obliczenia odległości do źródła:

$$r = \frac{5}{96\pi^2} \frac{c \dot{f}_{\text{GW}}}{h f_{\text{GW}}^3}.$$

Metoda ta jest zupełnie niezależna od tradycyjnie używanych do tej pory przez astronomów „drabin odległości”, kalibrowanych poprzez tzw. świece standardowe (np. cefeidy i supernowe typu Ia). W przyszłości pomiary odległości wieloma metodami naraz (np. jasności błysków gamma i fal grawitacyjnych przez nie emitowanych) będą porównywane dla poprawienia kosmicznej skali odległości i precyzyjnego wyznaczenia parametrów kosmologicznych, np. stałej Hubble’a.

Na koniec zastanówmy się, w jaki sposób można otrzymać masy składników dwóch dotychczas zarejestrowanych przez Advanced LIGO sygnałów, GW150914 i GW151226. Po zmierzeniu masy ćwierku ($30 M_{\odot}$ dla GW150914 i $9 M_{\odot}$ dla GW151226) do dyspozycji pozostaje nam analiza przebiegu samego ćwierku. W obu obserwacjach sygnał urywa się przy pewnej krytycznej częstotliwości f_{GW}^c . W przypadku GW150914 f_{GW}^c to około 150 Hz (450 Hz dla GW151226). Nagłe przerwanie ćwierku interpretowane jest jako zderzenie składników o skończonych rozmiarach i moment, w którym układ podwójny przestaje istnieć. Ograniczenie na rozmiar układu dostaniemy, zakładając, że składniki są czarnymi dziurami o promieniach Schwarzschilda. Zatem

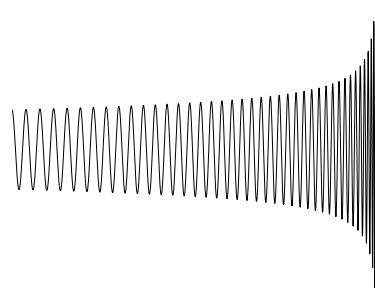
$$R_{s1} + R_{s2} = \frac{2G}{c^2} (m_1 + m_2) = a_{\text{fin}}.$$

Krytyczną odległość a_{fin} wstawiamy do trzeciego prawa Keplera, dostając oszacowanie na sumę mas

$$M = m_1 + m_2 \approx \frac{c^3}{4G\pi\sqrt{2}} \frac{1}{f_{\text{GW}}^c}.$$

Dla GW150914 obliczone w ten sposób M wynosi około $76 M_{\odot}$, dla GW151226 dostajemy $M = 25,4 M_{\odot}$. Dokładne wartości mas układu, otrzymane przy użyciu ogólnej teorii względności i symulacji numerycznych, to, odpowiednio, $65 M_{\odot}$ i $21 M_{\odot}$ (newtonowskie oszacowanie radzi sobie zatem całkiem nieźle, jednak nie na tyle dobrze, by poprawnie określić masy składników dla obu sygnałów poprzez rozwiązanie układu równań M i \mathcal{M}). Alternatywną metodą jest założenie, że masy składników są podobne. Wtedy $M = 2^{6/5} \mathcal{M}$, i $M = 70 M_{\odot}$ dla GW150914, oraz $20,7 M_{\odot}$ dla GW151226.

Masy końcowych czarnych dziur w obu przypadkach wynoszą $62 M_{\odot}$ i $20 M_{\odot}$. Gdzie podziała się brakująca masa? Została wyemitowana w falach grawitacyjnych. Można ją obliczyć w następujący sposób. Całkowita energia



Przykładowy ćwierk, czyli ewolucja w czasie amplitudy i częstotliwości fali grawitacyjnej emitowanej przez zacieśniający się układ podwójny.

Masy składników – czarnych dziur – w przypadku sygnału GW150914 obliczono na $36 M_{\odot}$ i $29 M_{\odot}$, a dla GW151226 na $14,2 M_{\odot}$ i $7,5 M_{\odot}$.

układu dla separacji a składa się z przyczynków od masy spoczynkowej i energii orbitalnej,

$$E = E_{\text{ms}} + E_{\text{orb}} = (m_1 + m_2) c^2 - \frac{Gm_1m_2}{2a}.$$

Zakładając dla uproszczenia, że $m_1 = m_2$, oraz że końcowa separacja $a_{\text{fin}} = 2R_s = 4Gm_1/c^2$ (w rzeczywistości układ staje się niestabilny dla nieco większych separacji) różnicę energii między stanem początkowym ($a \rightarrow \infty$) i końcowym oceniamy na 6% całkowitej masy-energii ($3,9 M_\odot$ dla GW150914 i $1,3 M_\odot$ dla GW151226, w porównaniu do $3 M_\odot$ i $1 M_\odot$ otrzymanych wyrafinowanymi metodami). Większość energii została wypromieniowana podczas przemierzania kilku ostatnich orbit oraz podczas procesu tworzenia końcowej czarnej dziury, którego nasz prosty model nie uwzględnia. W momencie największej „jasności” emitowana moc w obu przypadkach wynosiła około $10^{-3} c^5/G \approx 3 \cdot 10^{49}$ W (składniki poruszały się z prędkościami mniejszymi niż prędkość światła, w odległości większej od promienia R_s końcowej czarnej dziury). Przewyższa ona o rzędy wielkości emisję nie tylko największych dotychczas znanych kosmicznych katastrof – izotropowa emisja błysków gamma to „jedynie” 10^{47} W – ale także sumaryczną emisję wszystkich gwiazd we Wszechświecie. Szacowana gwiazdowa jasność obserwowanego Wszechświata, zawierającego około 10^{11} galaktyk podobnych do Drogi Mlecznej, z której każda składa się z około 10^{11} gwiazd podobnych do Słońca, wynosi bowiem około $4 \cdot 10^{48}$ W.



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1522. Na zbiorze dodatnich liczb całkowitych określone są operacje \oplus oraz \odot , takie, że dla każdej pary a, b dodatnich liczb całkowitych zachodzi

$$\underbrace{a \oplus a \oplus \dots \oplus a}_b = a \odot b,$$

b wystąpień a

a ponadto \oplus jest łączne, \odot zaś przemienne. Czy wynika z tego, że \oplus oraz \odot to „zwykłe” dodawanie i mnożenie? Czy implikacja będzie prawdziwa, jeżeli założenie o łączności operacji \oplus zastąpimy założeniem o jej przemienności?
Rozwiązanie na str. 7

M 1523. Wielokąt wypukły został podzielony odcinkami na skończoną liczbę czworokątów. Udowodnić, że co najmniej jeden z nich jest wypukły.
Rozwiązanie na str. 7

M 1524. Udowodnić, że dla każdego $n \geq 1$ istnieje ciąg arytmetyczny n dodatnich liczb całkowitych, z których każda jest podzielna przez sumę swoich cyfr (w zapisie dziesiętnym).

Wskazówka. W rozwiązaniu można skorzystać z twierdzenia o liczbach pierwszych, na przykład używając szacowania $\pi(x) < 2x/\ln x$, prawdziwego dla dostatecznie dużych x , gdzie $\pi(x)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od x .

Rozwiązanie na str. 8

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 923. W Układzie Słonecznym, poza planetami i ich księżycami, po orbitach okołosłonecznych porusza się też wiele mniejszych odłamków skalnych: planetoid i meteoroidów. Niektóre z nich, gdy wpadają do atmosfery ziemskiej, obserwujemy jako meteory. Oszacuj, z jaką maksymalną prędkością V względem Ziemi takie odłamki mogą wchodzić do jej atmosfery. Przyjmij, że masa Słońca $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg, odległość Ziemia-Słońce $R_{ZS} = 1,5 \cdot 10^{11}$ m, a stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg².

Rozwiązanie na str. 8

F 924. Oszacuj, jaki jest minimalny promień okołosłonecznej orbity żelaznego meteoroidu, na której pozostaje on jeszcze w stanie stałym. Temperatura topnienia taenitu (minerału, z którego są zbudowane meteoroidy żelazne) $T_m = 1700$ K, promień Słońca $R_S = 7,0 \cdot 10^8$ m, temperatura powierzchni Słońca $T_S = 5800$ K, a stała Boltzmanna $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ Wm⁻²K⁻⁴.

Rozwiązanie na str. 9

