

# Intuicjonizm i to, co po nim

Udowodnijmy lub obalmy twierdzenie: *istnieją takie liczby niewymierne  $a$  i  $b$ , że  $a^b$  jest liczbą wymierną.*

Rozważmy liczbę  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Jeśli jest ona wymierna, szukanymi liczbami są  $\sqrt{2}$  i  $\sqrt{2}$ . Jeśli natomiast  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  jest niewymierna, to wraz z nią szukaną liczbą jest  $\sqrt{2}$ , bowiem  $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ .  $\square$

Tego rodzaju dowód ma szczególną cechę: dowodzimy istnienia jakichś obiektów, nie umiając stwierdzić „co one za jedno”. Patrząc głębiej, widzimy, że wykorzystaliśmy tu tzw. zasadę wyłączonego środka: liczba  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  jest wymierna albo jest niewymierna.

Pojawianie się, począwszy od drugiej połowy XIX wieku, sytuacji krępujących matematyków, obiektów, których własności były nadmiernie paradoksalne, skłoniło część z nich (podpuszczaną zresztą przez Poincarégo) do narzucenia sobie (i zalecenia innym) ostrożności w dowodzeniu zwłaszcza istnienia jakichś obiektów: dowody *X istnieje, bo gdyby nie istniał, to olaboga!* zostały wykluczone. Nurt, którego ojcem założycielem okrzyknięto Luitzena Brouwera, nazwano *intuicjonizmem*. Jego rozwój przysporzył matematyce takich pojęć, jak funkcje obliczalne, algorytmy, a nawet maszyna Turinga. Dziś intuicjonizm, pod nazwą *konstrukttywizmu* jest filozoficznym aspektem informatyki, ale to już inna historia.

Dowiedźmy jednak początkowe twierdzenie zgodnie z intuicjonistami: takimi liczbami są  $\sqrt{2}$  i  $\log_2 9$ , bo  $\sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\log_2 3} = 3$ .

Marek KORDOS

Wypada zdradzić tajemnicę: liczba  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  jest nie tylko niewymierna, ale nawet niealgebraiczna, co wynika z twierdzenia Gelfonda-Schneidera: *jeśli liczby  $a$  i  $b$  są algebraiczne, przy czym  $a$  nie jest zerem ani jednością i liczba  $b$  jest niewymierna, to liczba  $a^b$  jest niealgebraiczna.*

Równość  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  dla  $p$  i  $q$  całkowitych pociąga za sobą równość  $p^2 = 2q^2$ , co jest niemożliwe, bo rozkład lewej strony na czynniki pierwsze zawiera parzystą liczbę dwójek, a prawej – nieparzystą.

Równość  $\log_2 9 = \frac{p}{q}$  dla  $p$  i  $q$  całkowitych pociąga za sobą równość  $9 = 2^{p/q}$ , czyli  $3^{2q} = 2^p$ , co jest niemożliwe, bo w rozkładzie lewej strony są same trójki, a prawej – same dwójki.



## Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

**M 1525.** *Udowodnić*, że jeżeli dla pewnej liczby naturalnej  $n \geq 2$  liczba  $n2^n + 1$  jest pierwsza, to liczby  $n + 1$  oraz  $n + 2$  są złożone.

Rozwiązanie na str. 7

**M 1526.** Niech  $f(x) = x^2 - 2$ . *Udowodnić*, że dla każdego  $n \geq 1$  równanie

$$\underbrace{f(f(f(\dots f(f(x))\dots))}_{n\text{-krotne złożenie } f} = x$$

ma  $2^n$  różnych rozwiązań rzeczywistych.

Rozwiązanie na str. 7

**M 1527.** Na przyjęcie przyszło  $n$  osób w kapeluszach ( $n \geq 2$ ). Następnie każde dwie osoby przywitały się dokładnie raz, przy czym każde powitanie polegało na zamianie kapeluszami, które w danej chwili witające się osoby miały na głowach. Okazało się, że po nastąpieniu wszystkich powitań każdy miał z powrotem swój kapelusz. *Udowodnić*, że taka sytuacja jest możliwa wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$  daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4.

Rozwiązanie na str. 14

Przygotował Michał NAWROCKI

**F 925.** Na zawieszoną na nitce o długości  $l = 1$  m doskonale odbijającą płytkę o masie 10 mg pada, prostopadle do jej powierzchni, wiązka światła laserowego. Jaka musiałaby być moc  $S$  padającego światła, aby pod jego działaniem wahadło, którym jest zawieszona na nitce płytka, wychyliło się o kąt  $\alpha = 1^\circ$  z położenia równowagi?

Rozwiązanie na str. 13

**F 926.** Nurek mający masę  $m = 80$  kg nabrał pełno powietrza do płuc ( $v = 5$  l) i wskoczył do wody. Z jakiej maksymalnej głębokości  $H$  nurek może wypłynąć, nie wykonując żadnych ruchów? Objętość ciała nurka to  $V = 82$  l.

Rozwiązanie na str. 13