Jeśli rozważane ciała nie są rozszerzeniami $\mathbb{Q}$, to twierdzenia Galois pozostają prawdziwe, a do niektórych omawianych po drodze wyników potrzebne jest założenie *rozdzielczości* rozszerzenia, co oznacza, że żaden wielomian rozkładalny w większym ciele nie może mieć w nim wielokrotnych pierwiastków.

wszystkie rozważane ciała zawierają $\mathbb{Q}$, bycie ciałem rozkładu wystarcza do bycia rozszerzeniem Galois. Grupa Galois tego rozszerzenia ma 6 elementów, ponieważ dla rozszerzenia Galois liczba jej elementów musi być równa stopniowi rozszerzenia. Wiemy ponadto, że automorfizm z grupy Galois może przeprowadzać pierwiastki wielomianu o współczynnikach z $\mathbb{Q}$ tylko na inne pierwiastki tego wielomianu, czyli je permutuje. Wielomian x^3-2 ma trzy różne pierwiastki, które można spermutować na 6 sposobów. Ponadto każda permutacja wyznacza już jednoznacznie automorfizm $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\zeta_3\sqrt[3]{2})$, ponieważ mówi, jakie mają być obrazy generatorów tego rozszerzenia. Wobec tego grupa Galois $G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\zeta_3\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ to grupa wszystkich permutacji trójelementowego zbioru!

Ponadto można sprawdzić, na przykład badając własności permutacji, że jedyną (nietrywialną) normalną podgrupą jest grupa cyklicznych permutacji trzech elementów. A wewnątrz $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\zeta_3\sqrt[3]{2})$ możemy znaleźć ciało $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, ponieważ
$$i\sqrt{3}=(\zeta_3\sqrt[3]{2}-\zeta_3^2\sqrt[3]{2})/\sqrt[3]{2}.$$
Okazuje się, że to dokładnie ciało punktów stałych podgrupy trójelementowych cykli, więc rozszerzenie $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ jest Galois – co zgadza się z faktem, że stanowi ono ciało rozkładu x^2+3.

Jak to powiązać z klasyczną geometrią? W przypadku konstrukcji geometrycznych kluczowym spostrzeżeniem jest to, że jeśli z pewnego zbioru punktów umiemy za pomocą cyrkla i linijki otrzymać nowy punkt, to jego współrzędne należą do rozszerzenia algebraicznego stopnia 2^n ciała zawierającego współrzędne danych punktów. Działanie cyrkla i linijki można opisać algebraicznie przez układy równań stopnia co najwyżej 2, więc każdy krok konstrukcji to rozszerzenie ciała o pierwiastek równania kwadratowego (lub brak rozszerzenia, jeśli nowe współrzędne już należą do ciała generowanego przez wcześniejsze). Wobec tego, jeśli mamy dany sześcian o boku długości 1, to konstrukcja sześcianu o dwukrotnie większej objętości wymagałaby umiejętności otrzymania odcinka o długości $\sqrt[3]{2}$. Ta liczba, jak wiemy, jest stopnia 3 nad $\mathbb{Q}$, co nie pozwala jej znaleźć się w żadnym rozszerzeniu $\mathbb{Q}$ stopnia 2^n.

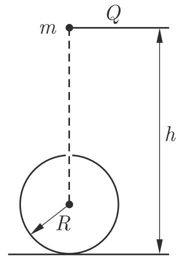
Jak widać, konsekwencje teorii Galois stanowią nawet bardziej wdzięczny temat opowieści niż jej podstawy, więc o tym w *Delcie* już było, nawet nie raz! Zainteresowanych rozwiązaniami pozostałych klasycznych problemów odsyłamy więc do artykułów Macieja Bryńskiego *O tym, co się da, a czego się nie da rozwiązać* (*Delta* 9/2013) i *Równania algebraiczne* (*Delta* 9/2016).

Zadania

Przygotował Michał NAWROCKI

F 937. Cylindryczne naczynie jest zamknięte tłokiem o masie M i polu powierzchni S. Na górnej powierzchni tłoka, bez straty energii, podskakuje N kulek, każda o masie $m \ll M$. Wysokość, na jaką podskakuje każda kulka, wynosi h, ciśnienie atmosferyczne jest równe p_0. Ile wynosi ciśnienie gazu pod tłokiem?
Rozwiązanie na str. 15

F 938. Do sferycznego, metalowego naczynia o promieniu R, mającego na górze niewielki otwór, wpadają z wysokości $h > 2R$ naładowane krople rtęci. Masa każdej kropli wynosi m, a jej ładunek elektryczny wynosi Q. Jaki będzie kolejny numer n ostatniej kropli, która jeszcze wpadnie do naczynia?
Rozwiązanie na str. 15



Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1543. Znaleźć wszystkie nieujemne liczby całkowite n, dla których każda z liczb $9n+16$ oraz $16n+9$ jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 3

M 1544. Liczby rzeczywiste a, b, c są takie, że $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$. Sprawdzić, że wartość wyrażenia
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$
nie zależy od wartości a,b,c.
Rozwiązanie na str. 3

M 1545. Niech $\mathcal{S}$ będzie takim podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ dodatnich liczb całkowitych, że dla każdej pary $x,y\in\mathcal{S}$ również $x+y\in\mathcal{S}$. Przypuśćmy, że zbiór $\mathbb{N}\setminus\mathcal{S}$ jest skończony i $\mathbb{N}\setminus\mathcal{S}=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Udowodnić, że
$$a_1+a_2+\ldots+a_n\leqslant n^2.$$
Rozwiązanie na str. 3