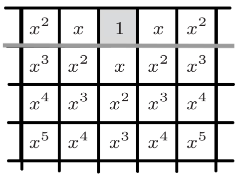
Z powyższego otrzymujemy $\phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + \dots = 1$ (dodaliśmy prawe i lewe strony powyższych równań). Mamy również

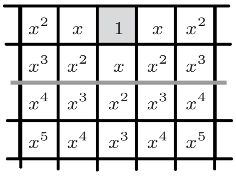
$$\dots + \phi^3 + \phi^2 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots = \phi + 2(\phi^2 + \phi^3 + \dots).$$

Mając planszę ponumerowaną konkretnymi liczbami i znając parę zależności dla tych wartości, obliczmy wartość gry w sytuacji, gdyby wszystkie pola (czyli nieskończenie wiele!) poniżej granicy były zajęte przez pionki, a naszym celem byłoby dostanie się tuż nad granicę (rys. 4). Oznaczmy wartość takiej konfiguracji przez S_1

$$S_1 = \left(\phi + 2(\phi^2 + \phi^3 + \dots)\right)(1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots)$$



Rys. 4. S_1



Rys. 5. S_2

Korzystając z tego, że $\phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + \dots = 1$, dostajemy

$$S_1 = (\phi + 2 \cdot 1)(1 + \phi + 1) = (2 + \phi)^2 = 4 + 4\phi + \phi^2 = \\ = 5 + 2\phi,$$

gdyż $\phi^2 = 1 - \phi$.

Teraz jako cel wyznaczmy sobie pole oddalone od granicy o dwa i ponownie zapełnijmy pionkami wszystkie pola poniżej granicy

$$S_2 = \phi(5 + 3\phi) = 5\phi + 3\phi^2 = 5\phi + 3(1 - \phi) = 2\phi + 3.$$

Analogicznie

$$S_3 = \phi(2\phi + 3) = 2\phi^2 + 3\phi = 2(1 - \phi) + 3\phi = 2 + \phi,$$
$$S_4 = \phi(2 + \phi) = 2\phi + \phi^2 = 2\phi + 1 - \phi = \phi + 1,$$
$$S_5 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = 1 - \phi + \phi = 1.$$

S_5 to wartość gry w przypadku, gdy naszym celem jest dojście do pola oddalonego od granicy o 5, ma to, oczywiście, związek z początkowym pytaniem. Ponieważ i tak wypełniamy wszystkie pola poniżej granicy na nieskończonej szachownicy, to ulokowanie „1” w tym czy w innym miejscu (ale 5 pól od granicy) niczego nie zmienia.

Cóż wynika z tego, że $S_5 = 1$? Oznacza to tyle, że w tej grze nie da się dojść pionkami na żadne pole oddalone od granicy o 5! Dla skończonej liczby pionków wartość początkowej konfiguracji będzie mniejsza niż 1, a ponieważ wartość nie może wzrosnąć po ruchu (tak dobraliśmy wartość ϕ), to startując z ustawienia o wartości mniejszej niż 1, nigdy nie osiągniemy pola „1”.

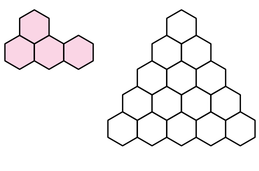
Źródło:
E. Berlekamp, J. Conway and R. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, 2004

Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1573. Wewnątrz kwadratu jednostkowego $\mathcal{K}$ znajduje się wielokąt wypukły $\mathcal{W}$ o polu większym od $\frac{1}{2}$. Wykazać, że wewnątrz wielokąta $\mathcal{W}$ można wskazać odcinek o długości $\frac{1}{2}$ równoległy do boku kwadratu $\mathcal{K}$.
Rozwiązanie na str. 22

M 1574. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *podkwadratową*, jeżeli $n+1$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par liczb podkwadratowych o tej własności, że ich suma oraz iloczyn także są podkwadratowe.
Rozwiązanie na str. 18



M 1575. *Płytką* nazwiemy pokazaną na rysunku figurę złożoną z czterech sześciokątów foremnych o boku 1 oraz dowolną figurę otrzymaną z niej przez obrót lub symetrię. Z kolei *n-trójkątem* nazwiemy trójkątny układ tworzony przez $1+2+\ldots+n$ sześciokątów foremnych o boku 1 (na rysunku pokazano 5-trójkąt). Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o tej własności, że z pewnej liczby płytek można ułożyć n-trójkąt.
Rozwiązanie na str. 8

Przygotował Michał NAWROCKI

F 957. Piłkarz zatrzymuje nogą piłkę poruszającą się w jego kierunku z prędkością $v = 10\,\mathrm{m/s}$. Znaleźć prędkość u, z jaką powinna poruszać się noga piłkarza, aby uderzająca w nią piłka zatrzymała się. Przyjąć, że masa piłki jest dużo mniejsza od masy nogi piłkarza, a zderzenie jest całkowicie sprężyste.
Rozwiązanie na str. 8

F 958. Na szalkę wagi sprężynowej o masie M spada z pewnej wysokości h kulka o masie m ($M \gg m$). Współczynnik sprężystości sprężyny wynosi k. Znaleźć odległość Δx punktu, do którego szalka wychyli się z położenia początkowego i wokół którego będzie wykonywała drgania. Przyjąć, że uderzenia kulki w szalkę są doskonale sprężyste.
Rozwiązanie na str. 18