Mianowicie, twierdzenie to można sformułować tak:

- jeśli liczba pierwsza p jest postaci $4k+3$, to p jest elementem nierozkładalnym w pierścieniu $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi | a,b \in \mathbb{Z}\}$,
- jeśli liczba pierwsza p nie jest postaci $4k+3$, to jest elementem rozkładalnym w $\mathbb{Z}[i]$, tzn.

$$(a+bi)(c+di) = p, \quad \text{gdzie } a+bi, c+di \notin \{1,-1,i,-i\}. \tag{4}$$

Rzeczywiście, z (4) wynika, że

$$(a-bi)(c-di) = p,$$

skąd po pomnożeniu obu ostatnich wzorów stronami otrzymujemy

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = p^2.$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc musi być

$$a^2+b^2 = p = c^2+d^2.$$

Odwrotnie, jeśli $p = a^2+b^2$, to liczba p jest rozkładalna w $\mathbb{Z}[i]$, gdyż

$$p = (a+bi)(a-bi).$$

Prawa rozkładu liczb pierwszych w innych pierścieniach typu $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ wiążą się w subtelny sposób z próbami przeniesienia powyższego twierdzenia Fermata na przedstawienia typu

$$p = x^2 + dy^2.$$

Z powyżej napisanego nie wynika w żaden sposób, które z omówionych teorioliczbowych twierdzeń Fermata jest *największe*. Wierzę jednak, że każde z nich potrafi zainfekować Czytelnika teorią liczb równie mocno, a o to tylko tu chodzi.

Zadania

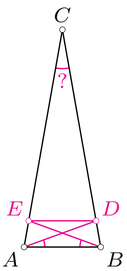
Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1579. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC, przy czym

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABE = \sphericalangle ACB \quad \text{oraz} \quad AD+DE+EB = AC.$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB.

Rozwiązanie na str. 6



M 1580. Niech x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 będą różnymi pierwiastkami wielomianu x^5+x^2+1. Wyznaczyć wartość wyrażenia

$$(x_1^2-2)(x_2^2-2)(x_3^2-2)(x_4^2-2)(x_5^2-2).$$

Rozwiązanie na str. 6

M 1581. Niech $\mathbb{N}_0$ oznacza zbiór nieujemnych liczb całkowitych.

(a) Czy istnieje $S \subset \mathbb{N}_0$ o tej własności, że każdy element zbioru $\mathbb{N}_0$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci sumy dwóch (niekoniecznie różnych) elementów S?

(b) Czy istnieje $S \subset \mathbb{N}_0$ o tej własności, że każdy element niepustego zbioru $\mathbb{N}_0 \setminus S$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci sumy dwóch (niekoniecznie różnych) elementów S?

Rozwiązanie na str. 1

Przygotował Michał NAWROCKI

F 961. Znaleźć maksymalny potencjał ϕ, do jakiego może naładować się oddalona od innych ciał kulka miedziana oświetlona światłem o długości fali $\lambda = 0{,}14$ µm. Praca wyjścia dla miedzi wynosi $A = 4{,}47$ eV.

Rozwiązanie na str. 2

F 962. Znajdujący się w próżni mały kawałek folii o masie $m = 1$ mg oświetlono impulsem światła laserowego o mocy $P = 15$ W i czasie trwania $t = 0{,}05$ s. Światło pada na folię prostopadle do jej powierzchni i całkowicie się od niej odbija. Jaką prędkość uzyska folia w wyniku oświetlenia impulsem? Siłę ciężkości zaniedbać.

Rozwiązanie na str. 3