teraz $k \geqslant 7$ będzie dowolnie ustaloną liczbą nieparzystą. Na mocy wzmocnionej hipotezy Goldbacha (każda liczba większa od 6 jest sumą dwóch różnych liczb pierwszych) istnieją takie różne liczby pierwsze p i q, że $k+1=p+q$. Przyjmijmy $x=pq$. Wtedy x spełnia równanie (3), gdyż

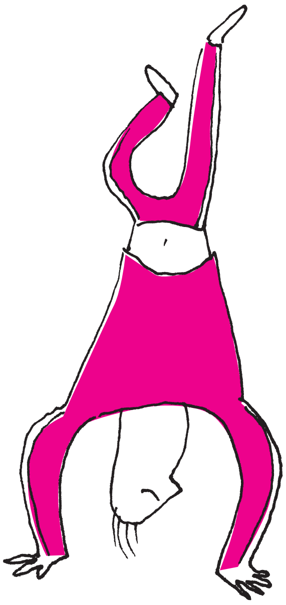
$$x-\varphi(x)=pq-\varphi(pq)=pq-(p-1)(q-1)=p+q-1=k.$$

To pokazuje hipotetyczną rozwiązalność równania (3) dla każdego nieparzystego $k \geqslant 1$.

Okazuje się, że równanie (3) może nie mieć rozwiązania dla $k>0$ parzystych. Najmniejszymi takimi k są: 10, 26, 34, 50, 52, 58, 86, 100. W 1995 roku Jerzy Browkin i Andrzej Schinzel udowodnili następujący fakt:
równanie

$$x-\varphi(x)=2^n \cdot 509203$$

nie ma rozwiązań dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$.



Na koniec kilka zadań dla Czytelnika.

Zadanie 1. Rozwiązać równania

$$\text{(a) } \varphi(x)=1, \quad \text{(b) } \varphi(x)=2, \quad \text{(c) } \varphi(x)=4.$$

Zadanie 2. Wykazać, że równanie

$$x-\varphi(x)=2^m \quad (m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2)$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie.

Zadanie 3. Rozważamy równanie

$$(*) \qquad x-\varphi(x)=p,$$

gdzie p jest daną liczbą pierwszą. Wykazać, że równanie $(*)$:

(a) ma co najmniej jedno rozwiązanie,
(b) ma skończoną liczbę rozwiązań,
(c) może mieć dowolnie wiele rozwiązań (w zależności od p).

Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1615. Udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych n, m liczba rozwiązań nierówności $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n| \leqslant m$ w liczbach całkowitych jest równa liczbie rozwiązań nierówności $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m| \leqslant n$ w liczbach całkowitych.
Rozwiązanie na str. 6

M 1616. Udowodnić, że nie istnieją takie liczby całkowite x, y, że $4xy-x-y$ jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 9

M 1617. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach wymiernych, który przyjmuje wartości niewymierne dla niewymiernych argumentów. Wykazać, że stopień P wynosi 1.
Rozwiązanie na str. 9

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 985. Piaszczyste brzegi mórz to zwykle miejsca, gdzie dno morskie powoli opada z odległością od krawędzi plaży. Dlaczego w takich miejscach grzbiety fal dobiegających do brzegu są do tego brzegu równoległe, niezależnie od ich kierunku na głębokiej wodzie?
Rozwiązanie na str. 11

F 986. Jaki jest stosunek średnich gęstości Słońca ρ_S i Ziemi ρ_Z, jeżeli wiadomo, że rok trwa około $T=365$ dni, przyspieszenie ziemskie $g=10\,\mathrm{m/s^2}$, promień Ziemi $R=6{,}4\cdot 10^6$ m, a rozmiary kątowe Słońca obserwowanego z Ziemi wynoszą $\delta=0{,}5°$?
Rozwiązanie na str. 11