

Oznaczmy przez \mathcal{W} zbiór pozycji, o których mówi twierdzenie 2.

Uzasadnienie tego rezultatu wykorzystuje obserwacje z omawianego wcześniej przykładu.

Po pierwsze, wykonując ruch z pozycji należącej do zbioru \mathcal{W} , przechodzimy na pozycję, która nie należy do zbioru \mathcal{W} (rys. 2).

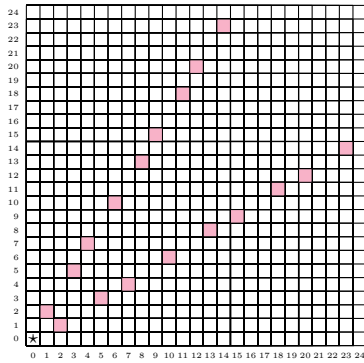
Na przykład nie ma żadnego ruchu z pozycji (a_n, b_n) do pozycji (a_m, b_m) lub (b_m, a_m) , gdzie $m < n$. Jest tak, bo z określenia a_n (patrz $(\bullet\bullet)$) $a_n \neq a_m$ i $a_n \neq b_m$. Ponadto $b_n > b_m > a_m$, zatem $b_n \neq a_m$ i $b_n \neq b_m$. Ruch wzdłuż przekątnej też nie daje sukcesu, bo $b_n - a_n = n$, a $b_m - a_m = m$.

Po drugie, zawsze istnieje ruch z pozycji nienależącej do zbioru \mathcal{W} na pozycję należącą do zbioru \mathcal{W} lub na pozycję $(0, 0)$.

Niech gracz znajduje się w pozycji $(a, b) \notin \mathcal{W} \cup \{(0, 0)\}$. Jeśli $a = b$ lub $a = 0$, lub $b = 0$, to jeden ruch pozwala znaleźć się na pozycji $(0, 0)$ i zostać zwycięzcą.

Załóżmy, że $0 < a < b$. Przyjmijmy najpierw, że $a = a_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $b > b_n$, to istnieje bezpośredni ruch na pozycję (a_n, b_n) . W przeciwnym razie $a_n < b < b_n$. Niech $m = b - a$. Wtedy $m < n = b_n - a_n$ (patrz (\bullet)), więc $a_m < a_n$ i istnieje ruch na pozycję (a_m, b_m) . W końcu, jeśli $a \neq a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to zgodnie z twierdzeniem Lorda Rayleigha $a = b_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $b > a \geq a_n$ i istnieje ruch na pozycję (b_n, a_n) . Gdy $0 < b < a$, rozumowanie jest podobne.

Wniosek. Jeśli w grze Wythoffa gracz będzie wykonywał ruch z pozycji $(a, b) \in \mathcal{W}$ lub $a = b$, lub $a = 0$ lub $b = 0$ i nie popełni błędu, to zostanie zwycięzcą!



Rys. 2

Cykle Milankovića

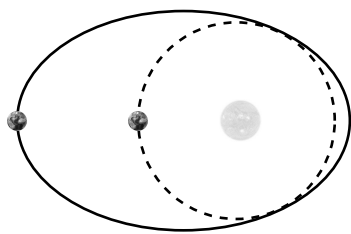
Michał BEJGER

Okazuje się, że astrologowie mają rację: położenie planet ma kluczowy wpływ na nasze życie. Oczywiście jednocześnie mylą się, ponieważ wpływ planet jest inny, niż to wynika z wróżb i horoskopów. Ziemia jest jedną z planet Układu Słonecznego i jako taka podlega grawitacyjnym wpływom innych ciał niebieskich: Słońca, Księżyca i dużych planet, w szczególności Jowisza. Wpływy te są tak istotne, że kształtują klimat na Ziemi w długiej skali czasowej rzędu dziesiątek i setek tysięcy lat. W szczególności epizodyczna natura okresów zlodowaceń i interglacjalów (okresów, w których lodowce ustępują), która jest udokumentowana w skamieniałościach z ostatnich kilku milionów lat, powodowana jest przede wszystkim cyklicznymi zmianami w parametrach orbitalnych Ziemi w ruchu wokół Słońca.

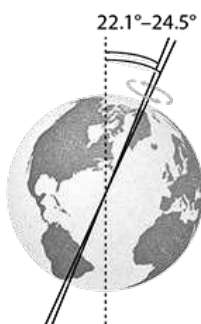
Najważniejsze efekty planetarne odpowiedzialne za cykliczne zmiany klimatu to periodyczności w mimośrodzie orbity Ziemi, nachyleniu osi obrotu Ziemi do płaszczyzny orbity oraz precesji osi obrotu. Te periodyczne zmiany nazywane są *cyklami Milankovića*. Wymienione periodyczności są modyfikowane przez dodatkowe efekty: zmiany w nachyleniu płaszczyzny orbity Ziemi względem całkowitego orbitalnego momentu pędu Układu Słonecznego, wyznaczanego z grubsza przez układ Słońce–Jowisz, oraz precesję orbity Ziemi, czyli ruch peryhelium.

Cykle są powiązane z ilością promieniowania słonecznego docierającego do powierzchni Ziemi. Głównym czynnikiem zmian klimatu nie jest wyłącznie całkowita ilość energii docierająca ze Słońca na Ziemię, ale sezonowość w nadmiarze lub niedoborze energii na określonym obszarze Ziemi, np. północnej półkuli. W związku z tym okresy powiększonej lub zmniejszonej ilości promieniowania słonecznego bezpośrednio wpływają na skomplikowany układ zależności lądów i oceanów definiujący globalny klimat Ziemi, m.in. na pojawianie się, wzrost i cofanie się lodowców i związane z tym zmniejszanie lub zwiększanie się wilgotności atmosfery.

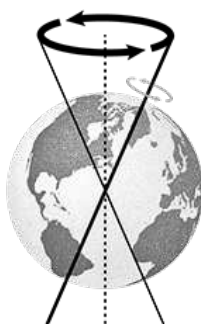
Milutin Milanković żył podobnie jak Tesla na przełomie XIX i XX wieku, był astronomem i klimatologiem, który zajmował się charakterystyką klimatów planet w Układzie Słonecznym i wyjaśnieniem długoterminowych zmian klimatu na Ziemi spowodowanych zmianami położenia Ziemi w stosunku do Słońca. Podobne hipotezy były proponowane w XIX wieku m.in. przez Josepha Adhemara i Jamesa Crolla, ale dopiero Milanković gruntownie przeanalizował przyczyny zmian.



a)



b)



c)

Mechanizmy odpowiedzialne za cykle Milankovića:
 a) zmiana mimośrodowości orbity Ziemi,
 b) zmiana nachylenia osi obrotu Ziemi,
 c) precesja osi obrotu.

Pierwszy z trzech cykli Milankovića dotyczy mimośrodu (ekscentryczności) orbity Ziemi, czyli kształtu elipsy orbity Ziemi w ruchu wokół Słońca (rys. a). Parametr ten jest zdefiniowany jako $\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, gdzie a i b to, odpowiednio, wielka i mała półoś orbity. W przypadku orbity Ziemi ϵ zmienia się od 0 do 5% w cyklu około 100 tys. lat, periodycznie zmienia się więc minimalna i maksymalna odległość Ziemia–Słońce, co z kolei zmienia ilość energii na powierzchni Ziemi w różnych porach roku. Obecnie różnica w odległości Ziemia–Słońce w aphelium i peryhelium to nieco ponad 2%, co przekłada się na 5% różnicy w otrzymywanej energii. Gdy orbita Ziemi jest najbardziej ekscentryczna, ilość energii słonecznej otrzymywanej w peryhelium jest około 25% większa niż w aphelium.

Drugi cykl wywołuje zmianę kąta nachylenia osi obrotu Ziemi w stosunku do płaszczyzny orbity (rys. b). Występuje on z częstotliwością około 41 tys. lat, a samo nachylenie zmienia się od 22,1° do 24,5°; obecnie wynosi około 23,44°. Jak wiadomo, nachylenie jest odpowiedzialne za pory roku. Z powodu cyklicznych zmian tego kąta zmienia się zatem znaczenie pór roku. Przy mniejszym nachyleniu promieniowanie słoneczne Słońca jest bardziej równomiernie rozłożone między zimą a latem, ale zwiększa za to różnicę w sumarycznej ilości energii deponowanej w rejonie równika i na biegunach.

Trzeci cykl Milankovića jest związany z precesją osi obrotu Ziemi, czyli zmianą kierunku osi obrotu (rys. c). Precesja jest wywołana oddziaływaniem grawitacyjnym Słońca i Księżyca. Obecnie oś obrotu Ziemi jest wycelowana na północnej półkuli w okolice gwiazdy Polaris (α Ursae Minoris), zwanej z tego powodu Gwiazdą Północną, a Ziemia jest w peryhelium orbity (najbliżej Słońca) podczas zimy na północnej półkuli. Jest to sytuacja tymczasowa, ponieważ precesja osi obrotu ma okres około 26 tys. lat (okres zwany rokiem platońskim). Za około 11 tys. lat oś obrotu będzie wskazywać na Wega (α Lyrae). Wtedy zima na półkuli północnej będzie występować, gdy Ziemia znajdzie się w aphelium orbity. Oznacza to zaostrzenie klimatu na półkuli północnej: zimy będą wtedy zimniejsze, a lata gorętsze. Cykl związany z precesją trwa w istocie nieco krócej niż rok platoński, około 23 tys. lat, ponieważ jest modyfikowany przez precesję całej orbity Ziemi: kierunek Słońce–peryhelium, ustalany względem odległych gwiazd, zmienia się z okresem około 112 tys. lat. Dla kompletności wspomnijmy jeszcze jedną periodyczność w ewolucji orbity Ziemi, to jest zmianę nachylenia płaszczyzny orbity Ziemi w stosunku do płaszczyzny prostopadłej do momentu pędu układu (płaszczyzny niezmienniczej Laplace'a). Okres zmian wynosi około 100 tys. lat, czyli tyle samo co zmiany mimośrodu orbity. Obecnie nachylenie płaszczyzny orbity wynosi około 1,57°.

Czemu to jest ważne? Ilość energii i istotność pory roku, w których Ziemia jest bardziej lub mniej oświetlana, wpływają w długiej skali czasowej na rosnącą lub malejącą grubość pokrywy lodowej, a przez to także na poziom wody w globalnym oceanie. W epokach lodowcowych więcej wody jest uwięzionej w lodzie, a więc w atmosferze jest jej mniej, klimat staje się zatem bardziej suchy, co oczywiście ma niebagatelne znaczenie dla roślin i zwierząt. Łądogłód powiększa się, gdy Ziemia jest w większej odległości od Słońca latem, a jednocześnie nachylenie osi obrotu planety jest małe. Relatywnie ciepła zima sprzyja opadom na biegunach, a stosunkowo mniejsza ilość energii otrzymywanej podczas chłodnego lata nie jest w stanie roztopić całości śniegu. Gdy jednak Ziemia latem jest bliżej Słońca, a nachylenie osi obrotu jest większe, lód topi się sprawniej i następuje wycofanie się lodowców. Regularne okresy suszy i epok wilgotnych doprowadziły m.in. do szybkiej ewolucji hominidów w wielkiej dolinie ryftowej we wschodniej Afryce i cyklicznych ekspedycji z Afryki do Europy, a stamtąd do Azji, Ameryk i Australii.

Epoka periodycznych zlodowaceń, czyli czwartorzęd, jeden z okresów ery kenozoicznej (*nowego życia*) rozpoczął się na Ziemi około 2,6 miliona lat temu. Przez większość czasu okresy ocieplenia i ochłodzenia występowały w cyklu 41 tys. lat, zgodnym ze zmianami kąta nachylenia osi obrotu Ziemi. Około miliona lat temu, z nie do końca znanych przyczyn, klimat zaczął oscylować z okresem 100 tys. lat związanym ze zmianami mimośrodu orbity. Okresy lodowcowe i interglacjalne trwają od tego czasu dłużej, ale są też bardziej ekstremalne. Jednocześnie ostatnie około 11,7 tys. lat, czyli holocen (*nowy kształt*), który rozpoczął się z końcem ostatniego zlodowacenia, to najdłuższy od pół miliona lat okres stabilnego i ciepłego klimatu; być może dlatego, że wszystkie parametry orbitalne odpowiedzialne za cykle Milankovića mają obecnie średnie wartości. Znajdujemy się w okresie interglacjalnym, w którym wzrost temperatury jest wywołany przez postępujące w krótkiej skali czasowej globalne ocieplenie. Nie ma ono nic wspólnego z cyklami Milankovića, ale niestety bardzo wiele z bezpośrednią działalnością człowieka.