

Zagłębiamy do środka gwiazdy

Alex SCHWARZENBERG-CZERNY*

* Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN

Znanym paradoksem jest, że o ile struktura Ziemi jest skomplikowana i do dziś słabo poznana, to wiemy, że gwiazdy są w pierwszym przybliżeniu „kulami gazowymi” – i tak właśnie zatytułował swoją książkę pierwszy badacz ich wnętrza, Robert Emden. Przyjął on, że zmiany ciśnienia P i gęstości ρ w funkcji odległości od środka r odbywają się przy zachowaniu relacji politropowej (politropowego równania stanu):

$$(1) \quad P(\rho) = K\rho^{(n+1)/n} \quad \text{czyli} \quad \rho(P) = \left(\frac{P}{K}\right)^{n/(n+1)},$$

gdzie K i n są stałymi, wynikającymi z własności materii danej gwiazdy; na przykład relatywistyczny gaz zdegenerowanych (ciasno upakowanych) elektronów jest dobrze opisany przez politropę z $n = 3$. Póki co pominiemy dokładność tego przybliżenia w ogólnym przypadku i skupimy się na pokazaniu, jak w oparciu o nie można samemu skonstruować model gwiazdy, używając krótkiego programu komputerowego. Zaczniemy od znalezienia stosownych równań opisujących gwiazdę. Jeśli przez m oznaczymy masę części gwiazdy zawartej w kuli o promieniu r , to powiększając ją o warstwę kulistą o grubości dr , otrzymamy przyrost masy równy $dm = 4\pi r^2 \rho dr$. Przyspieszenie grawitacyjne na takiej powierzchni to $g = Gm/r^2$, gdzie G to stała grawitacji, ponieważ wpływ mas zewnętrznych znika zgodnie z twierdzeniem Newtona. Zatem korzystając ze szkolnego wzoru $hg\rho$ na ciśnienie atmosfery o gęstości ρ i grubości h , dostajemy w warstwie dr spadek ciśnienia hydrostatycznego

$$(2) \quad dP = -\frac{Gm\rho}{r^2} dr \quad \text{oraz} \quad dm = 4\pi r^2 \rho dr.$$

Przed obliczeniami (patrz margines) pokażemy jeszcze, że wygodnie je wykonywać, wybierając pewne umowne jednostki oraz zmienne bezwymiarowe θ , μ i ξ :

$$(3) \quad \rho = \rho_c \theta, \quad P = K\rho_c^{(1+1/n)} \theta^{n+1}, \quad r = r_n \xi, \quad m = m_n \mu, \quad \text{skąd}$$

$$(4) \quad d\theta^{n+1} = -\frac{\rho_c G m_n}{(n+1)P_c r_n} \frac{(n+1)\mu\theta^n}{\xi^2} d\xi \quad \text{oraz} \quad d\mu = \frac{\rho_c 4\pi r_n^3}{m_n} \theta^n \xi^2 d\xi,$$

gdzie r_n i m_n możemy zdefiniować, wymagając, by wyróżnione fragmenty wynosiły 1, i otrzymując

$$(5) \quad m_n = \rho_c 4\pi r_n^3 \quad \text{oraz} \quad r_n^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{(1/n-1)}.$$

W nowych zmiennych warunki początkowe w centrum sprowadzają się do $\mu = 0$, $\theta = 1$ dla $\xi = 0$, a ich przybliżenia dla małych ξ wynoszą

$$(6) \quad \mu = \frac{1}{3}\xi^3, \quad \theta^{n+1} = 1 - \frac{n+1}{6}\xi^2.$$

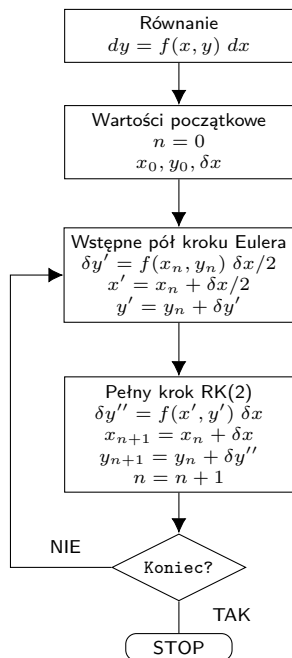
Stąd i z (4) wynika, że teraz rozwiązania na μ i θ zależą tylko od n . Rozwiązanie rozciąga się aż do powierzchni, gdzie dla $\xi = \xi_1$ mamy $\theta^{n+1} = 0$ oraz $\mu = \mu_1$.

Do wykonania obliczeń można się posłużyć krótkim programem napisanym w języku python do ściągnięcia ze stron autora. Obliczenia wykonujemy, korzystając z równań (4), startując z wartości otrzymanych z (6). Program rysuje wykresy przebiegu ciśnienia i gęstości w gwiazdzie, przykład wykresu na następnej stronie. Zestawienie dokładnych wyników na powierzchni dla różnych n mieści tabela pod wykresem.

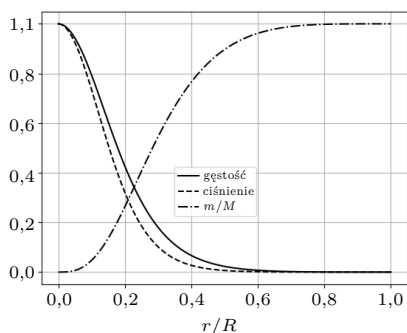
Dotąd nie korzystaliśmy z praw różniczkowania poza oczywistym $d(cx) = c dx$, z warunkiem $c = const$. Analityczne rozwiązania równań Emdena istnieją dla trzech wartości $n = 0, 1, 5$: $\theta^{(0)} = 1 - \xi^2/6$, $\theta^{(1)} = \sin \xi/\xi$ oraz $\theta^{(5)} = (1 + \xi^2/3)^{-1/2}$. To ostatnie rozwiązanie jest graniczne: $\xi_1 = \infty$. Dla $n > 5$ fizyczne rozwiązania nie istnieją, bo wykres θ nie przecina osi ξ . By sprawdzić te rozwiązania i wyrazić μ przez θ , trzeba jednak skorzystać z prawa różniczkowania $dx^a = ax^{a-1} dx$, wynikającego z dwumianu Newtona $(x + \delta x)^a - x^a \approx x^a + ax^{a-1}\delta x + \dots - x^a$. Użyjemy go tylko w tym akapicie i jego znajomość nie jest potrzebna w dalszej części. Wówczas lewa strona (4) przybiera postać $(n+1)\theta^n d\theta$, co po uproszczeniu

Ciśnienie i gęstość osiągają maksimum P_c , ρ_c w centrum gwiazdy i tam zmieniają się wolno, zatem kładąc $m \approx (4/3)\pi\rho_c r^3$ i $dP \approx (4/3)\pi G\rho_c^2 r dr$ dla małych r , unikamy dzielenia przez 0. Wybierając K , P_c i krok promienia δr , obliczenia można prowadzić tak: dla $r = 0$ kładziemy $m[0] = 0$, $P[0] = P_c$ i obliczamy ρ_c , δP i δm z (1) i (2), skąd $m[r + \delta r] = m[r] + \delta m$ oraz $P[r + \delta r] = P[r] + \delta P$ i tak dalej. W tej metodzie, zwanej metodą Eulera, zakładamy jednak, że zmiany parametrów w czasie kroku nie wpływają na δP i δm , co wymaga bardzo małego kroku. To jakby w ruchu jednostajnie przyspieszonym, gdzie $ds = (v_0 + gt)dt$ przyjmując jako średnią prędkość $v(t) = v_0$.

Ulepszeniem jest wersja metody Rungego-Kutty, w której oblicza się P i m w połowie kroku (jak u Eulera, tylko dla $r + \delta r/2$), a dopiero otrzymane wartości używa się do obliczenia δP i δm dla całego kroku δr . Czytelnik może się przekonać, że podobne postępowanie dla ruchu jednostajnie przyspieszonego daje poprawny wynik dla paraboli $s = v_0 t + gt^2/2$, stąd drugi rząd tej metody, RK(2). Z przybliżenia stałego ρ_c w pierwszym kroku otrzymujemy $\delta P \approx (4/3)\pi G\rho_c^2 (\delta r/2)\delta r$ i dalej: $m[\delta r] = (4/3)\pi\rho_c (\delta r)^3$ i $P[\delta r] = P_c - (2/3)\pi G\rho_c^2 (\delta r)^2$.



Schemat blokowy działania metody RK(2)



Wykres dla $n = 3$

Parametry gwiazd politropowych:

n	ξ_1	μ_1	$\frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle}$
0,0	2,44949	4,89898	1,00000
0,5	2,75270	3,78865	1,83514
1,0	3,14159	3,14159	3,28987
1,5	3,65375	2,71406	5,99070
2,0	4,35287	2,41105	11,40254
2,5	5,35528	2,18720	23,40646
3,0	6,89685	2,01824	54,18248
3,5	9,53581	1,89056	152,88366
4,0	14,97155	1,79723	622,40788
4,5	31,83646	1,73780	6189,47313
5,0	∞	1,73205	∞

Wynik dla $n = 5$ pochodzi z rozwiązania analitycznego.

po obu stronach daje rozwiązanie:

$$(7) \quad \mu = -\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}.$$

Mając z obliczeń ξ_1 i μ_1 na powierzchni, rzeczywisty promień R i masę gwiazdy M obliczamy z (3), otrzymując $R = r_n \xi_1 \sim \rho_c^{(1-n)/(2n)}$ i $M = m_n \mu_1 \sim \rho_c^{(1-n/3)}$.

Eliminując ρ_c , otrzymujemy:

$$(8) \quad M^{n-1} R^{3-n} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{K(n+1)}{G} \right]^n \mu_1^{n-1} \xi_1^{3-n} = const.$$

W podobny sposób średnia gęstość $\langle \rho \rangle$ to $M/(\frac{4}{3}\pi R^3) = 3\rho_c \mu_1 / \xi_1^3$, skąd przy pomocy (4)

$$(9) \quad \frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle} = \frac{\xi_1^3}{3\mu_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{Gm_n}{(n+1)r_n} = \frac{GM}{(n+1)R} \frac{\xi_1}{\mu_1}.$$

Zależność 8 jest bardzo ważna i może być weryfikowana w oparciu o obserwacje astronomiczne. Odwracając problem, dla znanych M i R oraz n można obliczyć ρ_c i K .

Z równania (8) wynika, że dla $n = 3$ gwiazda o danej masie zachowując równowagę mechaniczną (hydrostatyczną), może przyjmować różne promienie. Oznacza to, że jej równowaga jest obojętna. Można pokazać, że w równowadze trwałe są kule gazowe dla $n < 3$. Przykładem jest Ziemia o wnętrzu złożonym z ciekłych metali, gdzie gęstość praktycznie nie zmienia się z ciśnieniem, co oznacza $n = 0$ w równaniu (1). Natomiast dla $n > 3$ gwiazda nie jest trwała: ulega albo rozproszeniu, albo kurczy się do momentu, w którym zmiana własności sprasowanego gazu spowoduje $n < 3$.

Używając równania (9), można także obliczyć temperaturę w centrum gwiazdy. Skorzystamy z równania stanu gazu doskonałego, zapisanego jako $P = kT\rho/\mu_g$, gdzie μ_g to masa cząsteczki gazu, a k to stała Boltzmanna. Jeśli m i V to masa i objętość gazu, to gęstość jest m/V , a stała liczba Avogadro N jest ilością cząsteczek w molu, to $N\mu_g$ jest masą mola; zatem liczba moli to $q = m/(N\mu_g)$ i stała gazowa jest równa $\mathcal{R} = kN$, to podstawiając, otrzymujemy $PV = qRT$, czyli zwykłą postać równania gazu. Wstawiając do (9), dostajemy

$$(10) \quad \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{kT_c}{\mu_g} = \frac{GM}{(n+1)R} \frac{\xi_1}{\mu_1}.$$

Dla Słońca w przybliżeniu można użyć $n = 3$, choć naprawdę n jest nieco mniejsze i zmienia się z promieniem. Wyjaśnienie, dlaczego tak się dzieje, to temat na inną opowieść: o porównaniu gwiazd zwykłych (takich jak Słońce) i „kwantowych”, czyli białych karłów.

Matematyka i jej historia. Nie tylko ciekawostki!

Drugie prawo Keplera i owale Newtona. Kontrowersje wokół Lematu XXVIII w *Principiach*

* Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Johannes Kepler (1571–1630)

*Grzegorz ŁUKASZEWICZ**, *Mikołaj SIERŻĘGA**

Drugie prawo Keplera, mówiące o tym, że w równych odstępach czasu promień wodzący planety, poprowadzony od Słońca, zakreśla równe pola (patrz ilustracja na następnej stronie), było w dużym stopniu ignorowane w astronomii przednewtonowskiej. Na przykład w dziele *Astronomia Carolina*, z którego korzystał Newton, jest ono wyraźnie nieobecne. Wynikało to z jego niewielkiej przydatności do obliczeń położenia planet na ich orbitach. Załóżmy, że znany okres T obiegu planety po orbicie eliptycznej. Promień wodzący planety zakreślił w tym czasie znane pole $S = \pi ab$, gdzie a i b są półosiami elipsy. Rozpoczynając wędrówkę po orbicie w danym punkcie Q , po czasie T jesteśmy znowu w Q . Położenie to jest funkcją czasu obiegu T , jak i pola S zakreślonego w tym czasie przez promień wodzący planety. Korzystając z drugiego prawa Keplera, możemy teraz znaleźć pole s sektora zakreślonego przez promień wodzący planety w dowolnym odcinku czasu o długości t . Wydawałoby się, że w tym ogólnym przypadku można także łatwo wyrazić i obliczyć położenie P planety na jej orbicie jako funkcję czasu t lub zakreślonego w czasie t pola s . Okazuje się, że tak nie jest.