

### Własność odbicia laplasjanu.

Niech  $D$  będzie otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^2$ , symetrycznym względem prostej  $y = 0$  i niech  $D^+ = \{(x, y) : y > 0\}$ . Załóżmy, że funkcja  $G$  klasy  $C^2$  jest określona na  $D^+$  i spełnia  $\Delta G = \lambda G$  dla pewnego  $\lambda \in \mathbb{R}$  oraz dla każdego punktu  $(x_0, 0) \in D$  mamy  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} G(x, y) = 0$ . Wtedy funkcja  $\tilde{G}(x, y) = \text{sgn}(y)G(x, |y|)$ , określona na całym  $D$ , jest klasy  $C^2$  oraz spełnia  $\Delta \tilde{G} = \lambda \tilde{G}$ .



że funkcja  $H$  określona kawałkami na trójkątach  $ABC$  oraz  $ABC'$ , spełnia warunek  $\Delta H = \lambda H$  na całym tym obszarze.

W ten sam sposób, wyróżniając w  $W_1$  inne czworokąty, wnioskujemy, że funkcja  $H$  jest dobrze określona na wszystkich krawędziach trójkątów, a także że spełnia równanie  $\Delta H = \lambda H$  na całym  $\Omega_2$ . Dociekliwy Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić nietrudnym rachunkiem, że dla funkcji  $H$  jest również spełniony warunek brzegowy Dirichleta na  $\Omega_2$ . Dowód, że  $H$  nie jest tożsamościowo równa 0, pominiemy, gdyż jest on dość techniczny.

Pracowicie wykazaliśmy, że jeżeli  $\lambda$  należy do  $\Lambda(\Omega_1)$ , to należy również do  $\Lambda(\Omega_2)$ , czyli  $\Lambda(\Omega_1) \subset \Lambda(\Omega_2)$ . Analogicznie uzasadniamy  $\Lambda(\Omega_2) \subset \Lambda(\Omega_1)$ , a zatem  $\Lambda(\Omega_1) = \Lambda(\Omega_2)$ . Rozpatrywane wielokąty mają więc takie samo widmo drgań; nie są jednak izometryczne. Daje to negatywną odpowiedź na tytułowe pytanie. Ciekawe, co sądzą na ten temat perkusiści...?



## Co ma wspólnego cykl (6, 5, 4) z językiem polskim?

Każdej liczbie rzeczywistej możemy przypisać nieskończony ciąg cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego. Jak wiadomo, jeżeli ciąg od pewnego miejsca się *zapętla*, to mamy do czynienia z liczbą wymierną. Inaczej rzecz ujmując, liczby wymierne mają *okresowe* rozwinięcie dziesiętne. Przyjmujemy tutaj, że tzw. rozwinięcie skończone jest rozwinięciem okresowym – od pewnego miejsca na każdej pozycji występuje wyłącznie cyfra 0.

My będziemy rozważać ciągi liczbowe. Możemy przyjąć jakąś konkretną metodę produkcji kolejnych wyrazów ciągu, na przykład

$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}c_n, & \text{gdy } c_n \text{ jest parzysta,} \\ 3c_n + 1, & \text{gdy } c_n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Jednak stwierdzenie, czy dla dowolnej początkowej liczby  $c_0$  ten ciąg **zawsze** się zapętli, jest nie lada wyzwaniem. Tego dotyczy *problem Collatza* – ale to nie on jest bohaterem tego tekstu.

W 1972 roku zespół z Artificial Intelligence Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, opracował raport HAKMEM – złożony z prawie dwustu algorytmicznych ciekawostek (mieszasz algebry, kombinatoryki, teorii liczb, teorii grup...). Pozycja 134. wspomnianego raportu także dotyczy ciągów liczbowych i ich zapętlenia. Przyjmijmy następującą zasadę:

**każdy element ciągu (oprócz pierwszego) określa, ile liter jest potrzebnych do zapisania słownie (w języku angielskim) poprzedniego elementu ciągu.**

Zacznijmy na przykład od liczby 14. Słowo *fourteen* ma osiem liter, więc drugi element ciągu to 8. Słowo *eight* ma pięć liter, kolejny element ciągu to 5. Słowo *five* ma cztery litery – podobnie jak *four*. Zatem

$$14(\text{fourteen}) \rightarrow 8(\text{eight}) \rightarrow 5(\text{five}) \rightarrow 4(\text{four}) \rightarrow 4(\text{four}) \rightarrow \dots$$

i tym sposobem otrzymujemy ciąg (14, 8, 5, 4, 4, ...). Co ciekawe, niezależnie od tego, od jakiej liczby zaczniemy, dany ciąg zawsze (i szybko) zapętli się na liczbie 4.

Czy już się domyślasz, Czytelniku, jak brzmi odpowiedź na tytułowe pytanie?

Wspomniany raport HAKMEM można znaleźć na stronie [dspace.mit.edu/handle/1721.1/6086](https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/6086)

\* Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska

Bartłomiej PAWLIK\*