

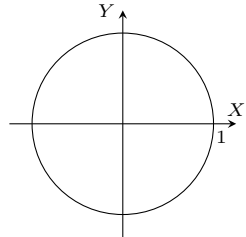
O metrykach i kulach

Jarosław GÓRNICKI*

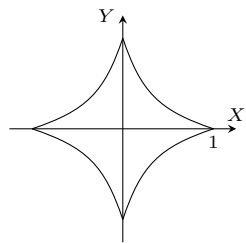
* Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Funkcję $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ spełniającą dla dowolnych $x, y, z \in X$ warunki
(m1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(m2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(m3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
nazywamy *metryką* (odległością).
Parę (X, d) nazywamy *przestrzenią metryczną*, zobacz Δ_{19} .

W przestrzeni metrycznej (X, d) odcinek, prostą, okrąg określamy następująco:
(1) *odcinek* o końcach $a, b \in X$ to zbiór $\{x \in X : d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\}$,
(2) *prosta* przechodząca przez punkty $a, b \in X, (a \neq b)$ to zbiór $\{x \in X : d(a, x) + d(x, b) = d(a, b) \vee d(x, a) + d(a, b) = d(x, b) \vee d(x, b) + d(b, a) = d(x, a)\}$,
(3) *okrąg* o środku $a \in X$ i promieniu $r \geq 0$ to zbiór $\{x \in X : d(x, a) = r\}$.



Rys. 1



Rys. 3

Funkcję $\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy *normą*, jeśli dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R}$ spełnia warunki

- (n1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(n2) $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$,
(n3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Parę $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*. W przestrzeniach unormowanych wzór $d(x, y) = \|x - y\|$ definiuje metrykę. Definicje te pozostają prawdziwe, gdy zamiast przestrzeni \mathbb{R}^2 rozważymy dowolną przestrzeń liniową X .

Jasiu, jak daleko masz do szkoły? Ciociu, to zależy, na jaką lekcję? Ta wymiana zdań pokazuje, że w życiu codziennym odległość jest pojęciem subiektywnym. Może być określona na wiele sposobów, np. droga na szczyt czerwonym szlakiem to 2,5 h. W matematyce trzymamy się prostych reguł (patrz margines).

Płaszczyzna \mathbb{R}^2 (ogólnie: zbiór) z różnymi metrykami może mieć różne własności. W tym artykule będą nas interesować kształty kul jednostkowych.

Przypomnijmy, *kulę* o środku w punkcie $p \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór $B[p, r] = \{x \in X : d(p, x) \leq r\}$. Słowo „kula” nie określa tu kształtu zbioru $B[p, r]$ – ten może być zaskakujący.

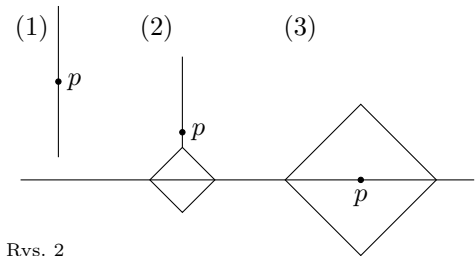
Przykład 1. Na początek coś regularnego. Gdy w szkole odległość między punktami $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$ mierzymy linijką, czyli stosujemy wzór Pitagorasa

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

to otrzymujemy wzorcową przestrzeń euklidesową (\mathbb{R}^2, d_2) . Kule w tej przestrzeni są kołami, a brzeg kuli $B_2[0, 1]$ opisuje równanie $x^2 + y^2 = 1$ (rys. 1). W takiej przestrzeni poznajemy geometrię euklidesową płaszczyzny oraz analizę matematyczną, postrzegamy otaczający nas lokalnie świat. A jak wygląda geometria i analiza w innej metryce?

Przykład 2. Na płaszczyźnie porośniętej gęstą dżunglą, przez którą przepływa rzeka, poruszamy się ścieżkami prostopadłymi do rzeki lub rzeką. Odległość między punktami wyznacza długość drogi, jaką musimy pokonać. W tej przestrzeni kształt kuli zależy od położenia jej środka i wielkości promienia. Dla kuli o promieniu $r = 1$ możemy wyróżnić przypadki (rys. 2):

- (1) odległość środka kuli p od rzeki wynosi co najmniej 1,
(2) środek kuli p jest poza rzeką, ale w odległości mniejszej niż 1,
(3) środek kuli p jest na rzece.



Rys. 2

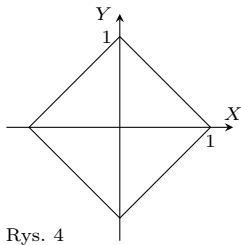
Przykład 3. Gdy odległość między punktami $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$ określimy wzorem

$$\tilde{d}(x, y) = \sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|y_1 - y_2|},$$

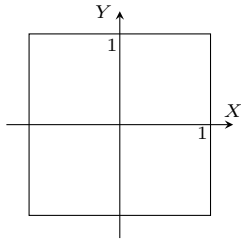
to brzeg kuli $B[0, 1]$ opisuje krzywa $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1, |x| \leq 1, |y| \leq 1$. Jej kształt otrzymamy, rysując najpierw wykres funkcji $y = (1 - \sqrt{x})^2, 0 \leq x \leq 1$, następnie odbijając ten wykres względem osi OX , a potem (całość) względem osi OY (rys. 3). Odcinek łączący punkty $A = (0, 1)$ i $B = (1, 0)$ nie zawiera się w kuli $B[0, 1]$, bo dla punktu $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in [A, B], \tilde{d}(0, C) = \sqrt{2} > 1$.

Przykłady 2 i 3 pokazują, że kule w przestrzeni metrycznej ani nie muszą mieć jednego ustalonego kształtu, ani nie muszą być zbiorami wypukłymi (zbiór jest *wypukły*, gdy wraz z każdymi dwoma punktami zawiera odcinek je łączący). Unikniemy tego, wprowadzając metrykę za pomocą *normy* (patrz margines). Na przykład, aby otrzymać kulę $B_2[0, 1]$ z przykładu 1, wprowadzamy normę euklidesową $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

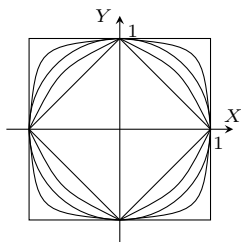
Gdy metryka pochodzi od normy, to rolę kuli jednostkowej $B[0, 1]$ w przestrzeni \mathbb{R}^2 (ogólniej, w przestrzeni liniowej) musi pełnić zbiór A , który jest wypukły, symetryczny względem punktu 0 , tj. $A = -A$, którego przecięcie z każdą prostą przechodzącą przez punkt 0 jest skończonym niezdegenerowanym odcinkiem. Zależność w drugą stronę też jest prawdziwa: dowolny taki zbiór A definiuje normę, w której jest on kulą jednostkową.



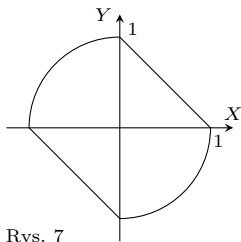
Rys. 4



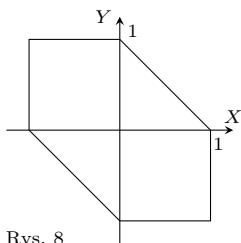
Rys. 5



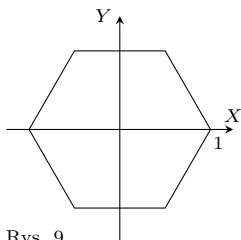
Rys. 6



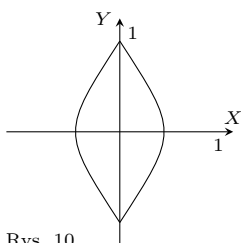
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Poznanie przykładów kształtowania kul przez normy i norm przez kule może być pożytecznym doświadczeniem. Rachunki ograniczymy do niezbędnego minimum na rzecz odwoływania się do znanych przykładów i naszej wyobraźni. Zapraszamy!

Przykład 4. W rodzinie norm $\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$ dla normy $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ kula

$$B_1[\mathbf{0}, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

jest kwadratem (rys. 4). Zauważmy, że obwód tej kuli, mierzony w metryce, z której ta kula pochodzi, jest równy 8.

Ponieważ $\lim_{p \rightarrow \infty} (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} = \max\{|x|, |y|\}$, więc $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$. W tej normie kula

$$\begin{aligned} B_\infty[\mathbf{0}, 1] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\} \end{aligned}$$

też jest kwadratem o obwodzie równym 8 (rys. 5). Kule jednostkowe w normach $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$ przedstawia rys. 6.

Przykład 5. Norma $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ z przykładu 4 jest szczególnym przypadkiem z rodziny norm $\|(x, y)\| = a|x| + b|y|$, gdzie $a, b > 0$. Przy takich normach kula $B[\mathbf{0}, 1]$ jest rombem o bokach równoległych do prostych $y = \pm \frac{a}{b}x$.

Norma $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ z przykładu 4 jest szczególnym przypadkiem z rodziny norm $\|(x, y)\| = \max\{a|x|, b|y|\}$, gdzie $a, b > 0$. Przy takich normach kula $B[\mathbf{0}, 1]$ jest prostokątem o bokach równoległych do osi współrzędnych.

Przykład 6. W normie $\|(x, y)\| = \max\{\sqrt{x^2 + y^2}, |x + y|\}$ kula $B[\mathbf{0}, 1]$ powstaje z przycięcia koła jednostkowego pasem $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 1\}$ (rys. 7).

Przycięcia koła jednostkowego możemy modelować, przyjmując np. normy

$$\begin{aligned} \|(x, y)\| &= \max\{\sqrt{x^2 + y^2}, \lambda|x + y|\}, \text{ gdzie } \lambda > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \|(x, y)\| &= \max\{\sqrt{x^2 + y^2}, 2|x|\}. \end{aligned}$$

Przykład 7. Jeśli norma $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|, |x + y|\}$, to kula

$$\begin{aligned} B[\mathbf{0}, 1] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|, |x + y|\} \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge |x + y| \leq 1\} \end{aligned}$$

jest sześciokątem będącym częścią wspólną trzech pasów (rys. 8). Można na to też patrzeć jak na przycięcie kwadratu jednostkowego w normie $\|\cdot\|_\infty$ z przykładu 4 pasem $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 1\}$. Obwód tej kuli jest równy 6.

Oczywiście możliwe są również inne przycięcia wspomnianego kwadratu.

Przykład 8. Kula $B[\mathbf{0}, 1]$ może być sześciokątem foremnym, którego jednym z wierzchołków jest punkt $(1, 0)$. Otrzymamy ją jako przecięcie trzech pasów, przyjmując normę (rys. 9)

$$\|(x, y)\| = \max\left\{\left|x + \frac{\sqrt{3}}{3}y\right|, \left|x - \frac{\sqrt{3}}{3}y\right|, \frac{2\sqrt{3}}{3}|y|\right\}.$$

Obwód tak otrzymanej kuli jednostkowej jest równy 6.

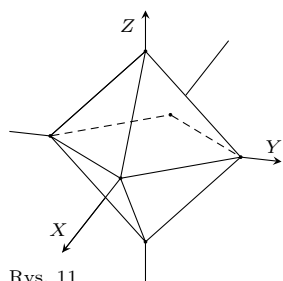
Zadanie 1 (rozwiązanie na stronie 2). Określić normę $\|(x, y)\|$ tak, aby kula jednostkowa $B[\mathbf{0}, 1]$ była ośmiokątem foremnym.

Przykład 9. Korzystając z normy

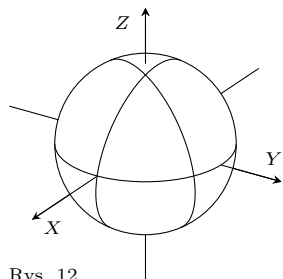
$$\|(x, y)\| = \max\{-x + \sqrt{x^2 + y^2}, x + \sqrt{x^2 + y^2}\} = |x| + \sqrt{x^2 + y^2},$$

otrzymujemy kulę $B[\mathbf{0}, 1]$ – „soczewkę wypukłą”, która jest ograniczona dwoma łukami parabol $x = \pm \frac{1-y^2}{2}$ (rys. 10).

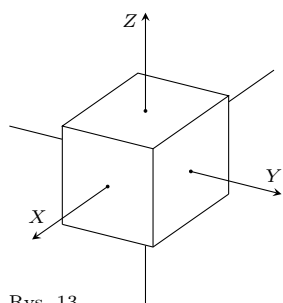
W 1932 roku Stanisław Gołąb wykazał, że: *na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 obwód kuli jednostkowej jest liczbą z przedziału $[6, 8]$. Ograniczenie dolne realizują kule sześciokątne z przykładów 7 i 8, a ograniczenie górne realizują kule kwadratowe z przykładu 4. Więcej o twierdzeniu Gołąba będzie można przeczytać niebawem w *Delcie!**



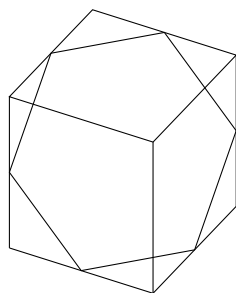
Rys. 11



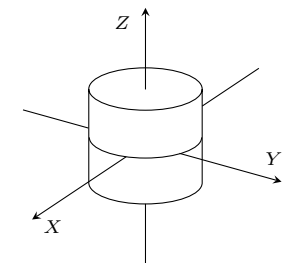
Rys. 12



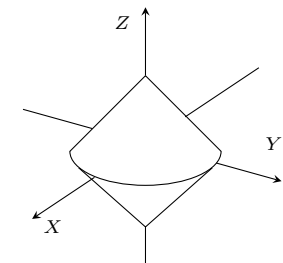
Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16

W 2000 roku Charles L. Adler i James Tanton pokazali, że wśród kul jednostkowych $B_p[\mathbf{0}, 1]$ wyznaczonych przez metryki $\|(x, y)\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, z przykładu 4, najmniejszy obwód ($= 2\pi$) ma kula $B_2[\mathbf{0}, 1]$ wyznaczona przez metrykę (normę) euklidesową.

Pole koła jednostkowego w metryce euklidesowej z przykładu 1 jest równe π . A może ktoś z Czytelników ma pomysł, jak obliczyć pola kół jednostkowych w innych metrykach...

Pokazaliśmy już, jaki kształt mogą przyjmować kule jednostkowe w zbiorze \mathbb{R}^2 przy różnych metrykach. Teraz zobaczymy, jaki kształt mają kule jednostkowe w przestrzeni \mathbb{R}^3 z różnymi metrykami.

Ze względu na możliwe zastosowania uwagę skierujemy na metryki pochodzące od normy. Gwarantują one, że kule jednostkowe $B[\mathbf{0}, 1]$ w przestrzeni \mathbb{R}^3 są zbiorami wypukłymi, symetrycznymi względem punktu $\mathbf{0}$, których przecięcie z każdą prostą przechodzącą przez punkt $\mathbf{0}$ jest skończonym odcinkiem różnym od punktu. Prawdziwa jest też zależność w drugą stronę: każdy zbiór o wyżej podanych własnościach definiuje normę, w której jest on kulą jednostkową.

Przykład 11. W rodzinie norm $\|(x, y, z)\|_p = (|x|^p + |y|^p + |z|^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$ wyróżnimy normy:

(a) $\|(x, y, z)\|_1 = |x| + |y| + |z|$.

Elementarne wiadomości o równaniu płaszczyzny w przestrzeni \mathbb{R}^3 pozwalają nam dostrzec, że w tym przypadku kula $B_1[\mathbf{0}, 1]$ jest ośmiościanem foremnym (rys. 11), którego przekrój płaszczyzną $z = 0$ jest kwadratem $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \leq 1\}$.

(b) $\|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

W tym przypadku kula $B_2[\mathbf{0}, 1]$ ma kształt tradycyjnej kuli (rys. 12). Łatwo możemy sobie wyobrazić, że po lekkiej modyfikacji tej normy do postaci $\|(x, y, z)\| = \sqrt{ax^2 + by^2 + cz^2}$, $a, b, c > 0$ kula jednostkowa jest elipsoidą.

(c) $\|(x, y, z)\|_\infty = \max\{|x|, |y|, |z|\}$.

Skoro

$$B_\infty[\mathbf{0}, 1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge |z| \leq 1\},$$

więc zbiór $B_\infty[\mathbf{0}, 1]$ jest sześcianem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych (rys. 13). Przekroje tego sześcianu płaszczyznami zawierającymi punkt $\mathbf{0}$ są wielokątami, wśród których są sześciokąty foremne (rys. 14).

Przykład 12. Jeśli normę określa wzór

$$\|(x, y, z)\| = \max\{\sqrt{x^2 + y^2}, |z|\},$$

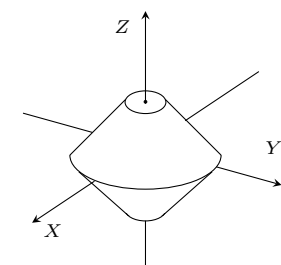
to kula $B[\mathbf{0}, 1]$ jest walcem. Istotnie, zbiór $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ tworzy „rurę” o przekroju koła jednostkowego i osi OZ , którą następnie ograniczamy płaszczyznami $z = \pm 1$ (rys. 15).

Przykład 13. Niech $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2} + |z|$. Przecinając zbiór $B[\mathbf{0}, 1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} + |z| \leq 1\}$ płaszczyzną $z = 0$, otrzymujemy koło $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$. W przecięciu zbioru $B[\mathbf{0}, 1]$ płaszczyzną $x = 0$ otrzymujemy kwadrat $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| + |z| \leq 1\}$. Analogicznie w przecięciu zbioru $B[\mathbf{0}, 1]$ dowolną płaszczyzną postaci $ax + by = 0$. Zatem kula $B[\mathbf{0}, 1]$ jest „dwustożkiem” powstałym w wyniku złączenia dwóch identycznych stożków podstawami (rys. 16).

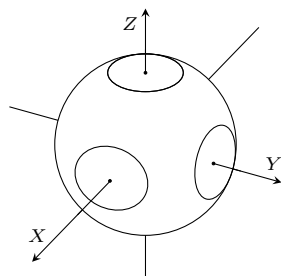
Przykład 14. Kulę jednostkową „dwustożkową” z przykładu 3 możemy modelować „przycinając” jej fragmenty. Norma

$$\|(x, y, z)\| = \max\{\sqrt{x^2 + y^2} + |z|, \frac{3}{2}|z|\}$$

przycina wierzchołki stożków płaszczyznami $z = \pm \frac{2}{3}$ (rys. 17).



Rys. 17



Rys. 18

Przykład 15. Analogicznie możemy postąpić z klasyczną kulą jednostkową z przykładu 11(b) i przyciąć ją sześcianem (rys. 18). Zapewnia to norma

$$\|(x, y, z)\| = \max\left\{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{4}{3} \max\{|x|, |y|, |z|\}\right\}.$$

W ten sposób możemy miksować różne normy. Do tworzenia kul można wykorzystać powierzchnie obrotowe. W danej przestrzeni unormowanej od jednego kształtu kuli jednostkowej do innego kształtu tej kuli możemy przejść w sposób ciągły. Liczba kul jednostkowych o rozmaitych kształtach jest więc ogromna. Wyprawa do czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej z normą $\|\cdot\|_2$, nawet w przypadku najprostszych figur – to fascynująca wyprawa pełna niespodzianek. . . Jaką objętość ma tam kula, jakie jest jej pole powierzchni? Co na ten temat możemy powiedzieć w przestrzeni \mathbb{R}^3 z innymi metrykami? Pytań jest wiele.

Czy do klasyfikacji przestrzeni można (jak?) wykorzystać własności kul? Okazuje się, że przestrzenie, w których kule nie mają „ostrzy”, „ostrzych krawędzi”, których brzegi nie zawierają odcinków, fragmentów płaszczyzny, mają więcej użytecznych własności. Lepiej to widać w przestrzeniach o nieskończonym wymiarze. Czytelnikom zainteresowanym tematem polecam lekturę książki: K. Goebel, S. Prus, *Elements of Geometry of Balls in Banach Spaces*, Oxford University Press, 2018.

Wycieczka na Merkurego

Lech FALANDYSZ

Merkury – u Greków Hermes – był boskim wysłannikiem, który przybywał na Ziemię i kontaktował się z ludźmi. Miał skrzydlaty kapelusz, czasem złote sandały ze skrzydłami, dzięki którym szybko przemieszczał się z miejsca na miejsce. Opiekował się pasterzami, pomagał podróżnym, kupcom i złodziejom. Jednak nie o rzymskim bogu chcemy pisać. Dziś Merkurem nazywamy planetę najbliższą Słońcu. Jego średnia odległość od Słońca wynosi około 0,39 AU (jednostki astronomicznej).

W 1974 roku w pobliżu Merkurego przeleciała Sonda „Mariner10”. Wykonała ona wiele pomiarów i fotografii. Teraz, po około 47 latach, gdy nastąpił dalszy postęp technologiczny, pokusimy się o znacznie bliższy „lot” – chcemy wylądować na planecie. Nasz statek kosmiczny i jego aparaty są w dużej części wykonane z rewelacyjnych materiałów – fulerenów – bardzo lekkich, bardzo wytrzymałych i mających niezwykle właściwości termiczne oraz elektryczne.

Na początek trzeba wybrać odpowiednią orbitę. Jeśli chcemy podróżować bez dużego balastu, jakim jest paliwo chemiczne, to wybrać należy lot beznapędowy po orbicie Hohmanna. Dokładny opis użycia tej eliptycznej orbity w lotach kosmicznych został przedstawiony w artykule „Wycieczka na Wenus”, Δ_{20}^{11} . Paliwo w mniejszej ilości potrzebne będzie do tego, by czasem skorygować ruch statku oraz regulować ruch lądownika planetarnego. Najpierw statek okrąży Ziemię bez napędu, jak satelita – na tzw. orbicie parkingowej.

Najdogodniejszym momentem wejścia na orbitę Hohmanna podczas lotu na Merkurego jest moment, gdy wyprzedza on Ziemię o 106° . Wtedy właśnie włączamy silniki i przyspieszamy. Po krótkim przyspieszeniu ruch odbywa się bez napędu silnikowego – napędza nas pole grawitacyjne Słońca. Orbita nasza ma aphelium na orbicie Ziemi, a peryhelium na orbicie Merkurego. Długość drogi do Merkurego – połowa długości elipsy – wynosi około 2,33 AU, a podróż potrwa 106 dni ziemskich (3,5 miesiąca). Merkury w tym czasie wykona około 1,2 obiegu (432°) wokół Słońca.

Jesteśmy już blisko planety i okrążamy ją po orbicie parkingowej jako tymczasowy sztuczny satelita. Drogą radiową przesyłamy wiadomość na Ziemię, która dojdzie tam po około 8 min i 40 s. W odpowiednim momencie od naszego statku odłącza się lądownik i opada na powierzchnię. Brak atmosfery nie daje możliwości wykorzystania spadochronu. Polegać musimy na hamującym działaniu silników.

Wreszcie wylądowaliśmy na rozległej równinie. To Równina Upału. Wyjście z lądownika byłoby aktem samobójczym. Aparaty wskazują temperaturę 450°C . Brak jest atmosfery. Tylko bardzo niewielka ilość cząstek α (jąder atomu helu) i innych cząstek pochodzących głównie z wiatru słonecznego tymczasowo „błąka się”

1 AU = 149 597 870 700 m

Garść informacji o Merkury: pośród planet ma on największą szybkość orbitalną – średnio ok. 48 km/s. Gdy jest w aphelium i w odpowiedniej konfiguracji względem Słońca i Ziemi, można zaobserwować jego oddalenie kątowe od Słońca (elongacja) dochodzące do ok. 28° . Przy peryhelium kąt ten dochodzi do ok. 18° . Na ogół Merkury widoczny jest przez krótki czas przed wschodem lub po zachodzie Słońca. Jego blask jest taki jak jasnych gwiazd. Z Ziemi nie można dostrzec szczegółów powierzchni planety. Wiemy, że z powodu bliskości Słońca musi być tam wysoka temperatura. Przy średnicy 2,6 razy mniejszej niż średnica Ziemi, planeta ma niewielką masę – ok. 5,5% masy Ziemi. Jej pole grawitacyjne jest zbyt małe, by utrzymać gorącą atmosferę.