



Na tropie wielomianów – część 2

Bartłomiej BZDEGA

Uwaga. W całym artykule (również w zadaniach) rozważamy wyłącznie wielomiany o współczynnikach rzeczywistych i mówimy wyłącznie o pierwiastkach rzeczywistych.

Korzystając z indukcji matematycznej oraz twierdzenia Bézouta (zob. kącik nr 12 w Δ_{19}^{12}), można wykazać, że wielomian stopnia $n \geq 1$ ma co najwyżej n pierwiastków. Z tego wynika następujący fakt, który jest punktem wyjścia do kolejnych rozważań.

Twierdzenie 1. *Jeśli wielomian $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ma więcej niż n pierwiastków, to jest on wielomianem zerowym. W szczególności zerowy jest każdy wielomian, który ma nieskończenie wiele pierwiastków.*

Prostym wnioskiem z powyższego jest

Twierdzenie 2. *Weźmy $n + 1$ różnych liczb: x_0, x_1, \dots, x_n . Jeśli wielomiany P i Q o stopniu nieprzekraczającym n spełniają równości $P(x_k) = Q(x_k)$ dla $k = 0, 1, \dots, n$, to $P = Q$.*

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 1 dla wielomianu $R(x) = Q(x) - P(x)$.

Twierdzenie 3. *Rozważmy pary liczb rzeczywistych (x_k, y_k) dla $k = 0, 1, \dots, n$. Jeśli wszystkie liczby x_0, x_1, \dots, x_n są różne, to istnieje dokładnie jeden wielomian P o stopniu nie większym niż n , który spełnia równości $P(x_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \dots, n$. Nazywamy go wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a.*

Dowód. Wystarczy skonstruować taki wielomian, bo twierdzenie 2 gwarantuje nam jego jedyność. W tym celu wykorzystamy wielomiany pomocnicze

$$L_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_k - x_1} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n-1}}{x_k - x_{n-1}} \cdot \frac{x - x_n}{x_k - x_n}.$$

Tu warto dokładnie się przyjrzeć, czym się różnią liczniki od mianowników oraz jakiego czynnika tu „brakuje” i dlaczego. Jest jasne, że $L_k(x_k) = 1$. Jeśli $j \neq k$, to ze względu na czynnik $\frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ mamy $L_k(x_j) = 0$. Z tych dwóch obserwacji wynika, że szukanym wielomianem jest

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x).$$

Co więcej, każdy z wielomianów L_0, L_1, \dots, L_n jest stopnia n , więc stopień wielomianu P nie przekracza n .

Zadania.

1. Wytropić wszystkie wielomiany P , które dla każdego rzeczywistego x spełniają daną równość:

- (a) $P(x) = \frac{P(x+1)+P(x-1)}{2}$;
- (b) $xP(x-1) = (x-2)P(x)$;
- (c) $P(x+1) = P(x) + 2x + 1$.

(H. Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata*)

2. Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Wyznaczyć wielomiany pomocnicze $L_k(x)$ dla $x_k = k$ przy $k = 0, 1, \dots, n$ i podać wartości $L_k(n+1)$. Korzystając z tych dobrodziejstw, wyznaczyć $P(n+1)$, jeśli P jest wielomianem o stopniu nie większym niż n oraz:

- (a) $P(k) = a^k$ dla $k = 0, 1, \dots, n$, przy czym $a \neq 0$ jest dowolną stałą;
- (b) $P(k) = \frac{k}{k+1}$ dla $k = 0, 1, \dots, n$. (1975 USAMO)

3. Udowodnić, że $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k-1)^{n-1} = 0$.

4. Dowiedzieć, że $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$.

5. Wielomiany P i Q mają co najmniej po jednym pierwiastku rzeczywistym oraz spełniają równość

$$P(1+x+Q(x)^2) = Q(1+x+P(x)^2).$$

Dowiedzieć, że $P = Q$. (www.imomath.com)

Wskazówki do zadań

1. (a) Niech $P(0) = a = b$; $P(1) = a + b$. Ze wzoru $P(x+1) = 2P(x) - P(x-1)$ oraz indukcji wynika, że $P(x) = ax + b$ dla wszystkich x należących do dziedziny twierdzenia Bézouta. Na mocy twierdzenia Bézouta możemy więc zapisać $P(x) = a(x-1)Q(x) + b$ dla pewnego wielomianu Q . Po podstawieniu tego do zadanej równości otrzymujemy $Q(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$. Niech $P(x) = ax^2 + bx + c$. Wstawiamy do zadanej równości $P(x+1) = 2P(x) - P(x-1)$. Po obliczeniach $(-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = 0$ dla $k \geq 1$, $1, \dots, n$. Z tego wynika, że Lagrange'a dla par $(x_k, y_k) = (k, k^n)$ przy $k = 0, 1, \dots, n$ jest wielomianem interpolacyjnym $L_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n-1}}{x_k - x_{n-1}} \cdot \frac{x - x_n}{x_k - x_n}$.

2. (a) Wykorzystać wzór dwumianowy Newtona. (b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

3. Wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a dla par $(x_k, y_k) = (k, k^n)$ przy $k = 0, 1, \dots, n$ jest wielomian $L_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n-1}}{x_k - x_{n-1}} \cdot \frac{x - x_n}{x_k - x_n}$. Wstawiamy do zadanej równości $L_k(n+1) = \frac{n+1 - x_0}{n+1 - x_0} \cdot \dots \cdot \frac{n+1 - x_{k-1}}{n+1 - x_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{n+1 - x_{n-1}}{n+1 - x_{n-1}} \cdot \frac{n+1 - x_n}{n+1 - x_n}$.

4. (a) Biorąc $x = 0$ oraz $x = 2$, stwierdzamy, że $P(0) = 0$ i odpowiednio $P(1) = 0$. Na mocy twierdzenia Bézouta możemy więc zapisać $P(x) = x(x-1)Q(x)$ dla pewnego wielomianu Q . Po podstawieniu tego do zadanej równości otrzymujemy $Q(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$. Niech $P(x) = ax^2 + bx + c$. Wstawiamy do zadanej równości $P(x+1) = 2P(x) - P(x-1)$. Po obliczeniach $(-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = 0$ dla $k \geq 1$, $1, \dots, n$. Z tego wynika, że Lagrange'a dla par $(x_k, y_k) = (k, k^n)$ przy $k = 0, 1, \dots, n$ jest wielomianem interpolacyjnym $L_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n-1}}{x_k - x_{n-1}} \cdot \frac{x - x_n}{x_k - x_n}$.

5. (a) Niech $P(0) = a = b$; $P(1) = a + b$. Ze wzoru $P(x+1) = 2P(x) - P(x-1)$ oraz indukcji wynika, że $P(x) = ax + b$ dla wszystkich x należących do dziedziny twierdzenia Bézouta. Na mocy twierdzenia Bézouta możemy więc zapisać $P(x) = a(x-1)Q(x) + b$ dla pewnego wielomianu Q . Po podstawieniu tego do zadanej równości otrzymujemy $Q(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$. Niech $P(x) = ax^2 + bx + c$. Wstawiamy do zadanej równości $P(x+1) = 2P(x) - P(x-1)$. Po obliczeniach $(-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = 0$ dla $k \geq 1$, $1, \dots, n$. Z tego wynika, że Lagrange'a dla par $(x_k, y_k) = (k, k^n)$ przy $k = 0, 1, \dots, n$ jest wielomianem interpolacyjnym $L_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n-1}}{x_k - x_{n-1}} \cdot \frac{x - x_n}{x_k - x_n}$.