



Rozwiązanie zadania M 1734.

Ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1})$ nazwijmy *dobrym*, jeśli 1 występuje częściej wśród $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n+1}$ niż wśród x_1, x_2, \dots, x_n . W pozostałych przypadkach ciąg jest *zły*. Ciągowi $s = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+1})$ przypiszmy ciąg

$$s^* = (1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_{2n+1}).$$

Przypuśćmy, że 1 występuje a razy wśród liczb x_1, x_2, \dots, x_n oraz b razy wśród $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n+1}$. Wówczas występuje ona $n - a$ razy wśród liczb

$$1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n$$

oraz $n + 1 - b$ razy wśród liczb

$$1 - x_{n+1}, 1 - x_{n+2}, \dots, 1 - x_{2n+1}.$$

Zauważmy jednak, że

$$a < b \iff n - a \geq n + 1 - b,$$

więc s jest dobry wtedy i tylko wtedy, gdy s^* jest zły. Wobec tego przypisanie $s \rightarrow s^*$ jest bijekcją między zbiorami ciągów dobrych i złych, a to oznacza, że dokładnie połowa ciągów jest dobra.

Twierdzenie o końcach. Koniec dowolnej sekwencji R dla dowolnego L_0 ostatecznie upada w jeden z trzech cykli:

- $2^2]$
- $2311322113212221] \rightarrow 213211322211312113211] \rightarrow 21113122113322113111221131221] \rightarrow 212322211331222113112211]$
- $231221132221222112112322211n] \rightarrow 21311222113321132211221121332211n]$, dla $(n > 1)$.

Twierdzenie o podziale. Sekwencja $S = AB$ dzieli się na dwa niezależne pierwiastki $S = A * B$ wtedy i tylko wtedy, gdy A lub B jest pusty lub obie sekwencje są jedną z podanych niżej (tutaj $n \geq 4$ oraz $m \leq 3$):

A	B
$n]$	$[m$
$2]$	$[1^1 X^1 \quad \text{lub} \quad [1^3 \quad \text{lub} \quad [3^1 X^{\neq 3} \quad \text{lub} \quad [n^1$
$\neq 2]$	$[2^2 1^1 X^1 \quad \text{lub} \quad [2^2 1^3 \quad \text{lub} \quad [2^2 3^1 X^{\neq 3} \quad \text{lub} \quad [2^2 n^0 \quad \text{lub} \quad 1$

Dowody zaprezentowanych faktów są dość techniczne; można je odnaleźć w pracy Conwaya *The weird and wonderful chemistry of radioactive decay* z 1987 roku.

Komentarz do rozwiązania zadania 1064

Czytelnik Dociekliwy na pewno nie jest zadowolony z podanego przez nas rozwiązania zadania 1064.

Zastosowaliśmy w nim wzory mechaniki klasycznej. Być może takie przybliżenie jest wystarczająco dokładne w przypadku mas i energii występujących w treści zadania, ale Czytelnik Dociekliwy chciałby, oczywiście, znać pełne rozwiązanie, poprawne także wtedy, gdy ciepło reakcji ma wartość porównywalną z masami substratów i produktów. Spełniając słuszne oczekiwania Czytelnika Dociekliwego, przedstawiamy poniżej pełne rozwiązanie uwzględniające efekty relatywistyczne.

Podczas reakcji spełnione są prawa zachowania pędu i energii: w układzie laboratorium po zajściu reakcji sumaryczny pęd produktów będzie równy pędowi deuteronu przed reakcją. Z pędami produktów związana jest też ich energia kinetyczna. Tylko w układzie środka masy zderzających się jąder sumaryczny pęd przed i po reakcji jest równy zeru (tak definiujemy układ środka masy). Oznacza to, że warunkiem zajścia reakcji jest, by sumaryczna energia w układzie środka masy była równa sumie energii spoczynkowych produktów, która jest o $|Q|$ większa od sumy mas spoczynkowych substratów.

W zderzeniach cząstek o energiach całkowitych E_i i pędach \vec{p}_i energia dostępna w środku masy E_{CM} spełnia równanie:

$$E_{CM}^2 = \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i c \right)^2.$$

W powyższym wzorze c oznacza wartość prędkości światła, a prawa strona równania jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, a ze względu na spełnienie praw zachowania pędu i energii ma tę samą wartość przed reakcją i po niej.

Zastosujmy dotychczasowe rozważania ogólne do podanej reakcji. Oznaczmy masę deuteronu (pocisku) przez m , a masę jądra ^{14}N (tarczy) przez M . Brakuje nam pędu deuteronu o energii kinetycznej E_k . Całkowita energia deuteronu: $E = mc^2 + E_k$. Z drugiej strony: $E = \sqrt{m^2 c^4 + (pc)^2}$. Otrzymujemy: $p^2 c^2 = E_k^2 + 2mc^2 E_k$. Podstawiamy do równania określającego energię dostępną w układzie środka masy w przypadku, gdy produkty reakcji w tym układzie spoczywają:

$$\begin{aligned} ((m + M)c^2 + E_k)^2 - (E_k^2 + 2mc^2 E_k) &= \\ &= ((M + m)c^2 + |Q|)^2. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu powyższego równania względem E_k otrzymujemy wartość minimalnej energii kinetycznej deuteru (w układzie laboratorium):

$$E_k = \frac{m + M}{M} |Q| + \frac{Q^2}{2Mc^2}.$$

Dla reakcji podanej w treści zadania wynik pełnego rozwiązania różni się od rozwiązania przybliżonego (z zastosowaniem wzorów mechaniki klasycznej) o wyraz: $Q^2/(2Mc^2) \approx 4 \cdot 10^{-4}$ MeV. Tak mała wartość poprawki w pełni usprawiedliwia zastosowanie „przybliżenia klasycznego”.

Uwaga: Użyty w treści zadania termin „ciepło reakcji” odnosi się do wielkości mikroskopowej dotyczącej pojedynczego zderzenia. W chemii „ciepło reakcji” definiowane jest dla układów makroskopowych, a jego wartość zależy od warunków, w jakich przebiega reakcja (np. pod stałym ciśnieniem czy w stałej objętości).

Andrzej MAJHOFER