Klub 44 M

$\sqrt[\otimes]{\sum !} = 44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2023

Zadania z matematyki nr 857, 858

Redaguje Marcin E. KUCZMA

857. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y, dla których liczby $x^2 - 4y$ oraz $y^2 - 4x$ są kwadratami liczb całkowitych.

858. W przestrzeni znajduje się trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 oraz odcinek DE długości 1, mający punkt wspólny z trójkątem ABC. Udowodnić, że pewien z punktów A, B, C, D, E jest w odległości nie większej niż 1 od czterech pozostałych.

Zadanie 858 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2022

Przypominamy treść zadań:

849. Rozwiązać równanie $4^x + 4^y + 1 = z^4$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

850. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt M jest środkiem boku BC. Punkt P leży na odcinku AM. Proste BP i CP przecinają boki AC i AB odpowiednio w punktach D i E. Te same proste przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach X i Y, różnych od B i C. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach AXD i AYE przecinają się w punkcie różnym od A, leżącym na odcinku AM.

849. Niech trójka (x, y, z) będzie jednym z rozwiązań. Liczba z jest nieparzysta. Przyjmijmy, że $x \leqslant y$. Z równania widać, że $z^4 > 4^y$; zatem $z^2 \geqslant 2^y + 1$, skąd przez podniesienie do kwadratu i ponowne skorzystanie z równania dostajemy $4^x \geqslant 2 \cdot 2^y$, czyli $y \leqslant 2x - 1$.

Przepiszmy teraz równanie tak:

$$4^x + 4^y = (z^2 - 1)(z^2 + 1). \tag{1}$$

Ponieważ $x \leqslant y$, lewa strona dzieli się przez 2^{2x}. Po prawej stronie czynnik $z^2 + 1$ jest niepodzielny przez 4, wobec czego czynnik $z^2 - 1$ musi dzielić się przez 2^{2x-1}. Stąd $z^2 - 1 \geqslant 2^{2x-1}$ i dalej:

$$(z^2 - 1)(z^2 + 1) \geqslant 2^{2x-1}(2^{2x-1} + 2) = 4^{2x-1} + 4^x,$$

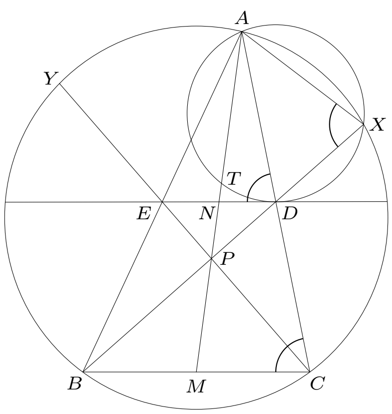
co w połączeniu z (1) pokazuje, że $y \geqslant 2x - 1$.

Wcześniej wykazaliśmy, że $y \leqslant 2x - 1$. Tak więc $y = 2x - 1$, czyli $x = (y+1)/2$. Wstawiamy to do równania (w wyjściowej postaci):

$$2^{y+1} + 4^y + 1 = z^4. \tag{2}$$

Lewa strona (2) to kwadrat liczby $2^y + 1$, która wobec tego jest równa z^2. Otrzymujemy $2^y = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$. Każdy z czynników musi być potęgą dwójki; różnią się o 2, czyli wynoszą 2 i 4. Stąd $z = 3$, $y = 3$, $x = (y+1)/2 = 2$.

Odrzucając założenie, że $x \leqslant y$, stwierdzamy, że równanie ma dwa rozwiązania: $(x, y, z) = (2, 3, 3)$ oraz $(3, 2, 3)$.



Rysunek do zadania 850

850. Ponieważ $AE \cdot BM \cdot CD = EB \cdot MC \cdot DA$ (Ceva), zaś $BM = MC$, więc ma miejsce proporcja $AE : BE = AD : CD$, z której wynika, że $ED \| BC$. Zatem punkt N, w którym przecinają się proste AM i ED, jest środkiem odcinka ED. Dzięki tej równoległości (oraz położeniu punktów A, B, C, X na jednym okręgu) mamy równość

$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle ACB = \sphericalangle AXD,$$

która mówi, że kąt między prostą ED i cięciwą AD okręgu AXD jest równy kątowi wpisanemu w ów okrąg. Stąd wniosek, że prosta ED jest styczna do okręgu AXD. Analogicznie, jest ona też styczna do okręgu AYE.

Przyjmijmy, że prosta AM przecina okrąg AXD w punktach A i T, zaś okrąg AYE w punktach A i U (gdy jest styczna do któregoś z nich, przyjmujemy $T = A$ bądź $U = A$). Oba te okręgi leżą po tej samej stronie prostej ED co punkt A, zatem punkty T i U leżą na półprostej $NA^{\rightarrow}$. Odcinek ND jest styczny do okręgu AXD, więc

(3) $NA \cdot NT = ND^2$; podobnie $NA \cdot NU = NE^2$.

A skoro $ND = NE$, wynika stąd, że T i U to ten sam punkt – ten, o który chodzi w zadaniu. Pozostaje uzasadnić, że leży on na odcinku AM; w tym celu wystarczy pokazać, że $NT < NA$.

Gdyby było inaczej ($NT \geqslant NA$), to wobec związków (3) mielibyśmy też $ND \geqslant NA$, $NE \geqslant NA$. Dałoby to nierówności $\sphericalangle NAD \geqslant \sphericalangle NDA$, $\sphericalangle NAE \geqslant \sphericalangle NEA$; po dodaniu stronami (i uwzględnieniu podobieństwa trójkątów AED i ABC) otrzymalibyśmy: $\sphericalangle CAB \geqslant \sphericalangle BCA + \sphericalangle ABC$, wbrew założeniu, że trójkąt ABC jest ostrokątny. To kończy rozwiązanie.

Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2023

Zadania z fizyki nr 754, 755

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

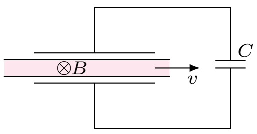
754. Okładki kondensatora płaskiego o pojemności C naładowano do potencjałów φ i $(-\varphi)$ względem ziemi. Każda z okładek tworzy z ziemią kondensator o pojemności C_1. Znaleźć stosunek natężeń pola elektrycznego między okładkami kondensatora o pojemności C na początku i po uziemieniu jednej z okładek.

755. Zamknięte naczynie całkowicie wypełnione jest wodą. Tuż nad dnem naczynia znajduje się pęcherzyk powietrza. Jak zmieni się ciśnienie na poziomie dna, gdy pęcherzyk wypłynie?

Rozwiązania zadań z numeru 11/2022

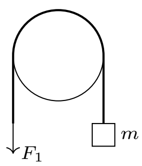
Przypominamy treść zadań:

746. Między okładkami kondensatora płaskiego odległymi o d, których powierzchnia wynosi S, porusza się z prędkością v płaskorównoległa, przewodząca płyta o grubości $d/2$. Wektor $\boldsymbol{v}$ jest równoległy do okładek kondensatora, rozmiary płyty są dużo większe od rozmiarów okładek. Równolegle do powierzchni płyty i prostopadle do v działa stałe pole magnetyczne o indukcji B (rys. 1). Znaleźć napięcie na kondensatorze o pojemności C połączonym z okładkami pierwszego kondensatora jak na rysunku.



Rys. 1

747. Przez nieruchomą, poziomą belkę przerzucony jest sznurek (rys. 2). Aby utrzymać ciężar o masie $m = 6$ kg zawieszony na końcu sznurka, trzeba ciągnąć drugi koniec minimalną siłą $F_1 = 40$ N (rys. 2). Jaką minimalną siłą F_2 trzeba ciągnąć sznurek, aby ciężar zaczął się podnosić?



Rys. 2

746. Podczas ruchu płyty wewnątrz kondensatora na swobodne elektrony działa siła Lorentza $-e\vec{v} \times \vec{B}$ skierowana w dół, siła $-e\vec{E}$ od ładunków na powierzchni płyty skierowana w górę oraz siła $-e\vec{E}_0$ skierowana w dół (rys. 3). Siły te równoważą się:

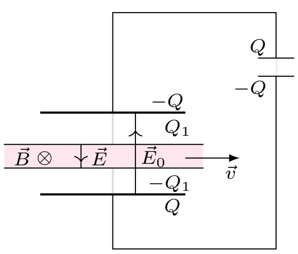
$$vB + E_0 - E = 0. \tag{1}$$

Ładunki na połączonych okładkach mają taką samą wartość bezwzględną Q, zatem

$$Q = CU = \varepsilon_0 S E_0, \tag{2}$$

gdzie U jest szukanym napięciem. Napięcia między okładkami połączonych kondensatorów są jednakowe:

$$U = Ed/2 - E_0 d. \tag{3}$$

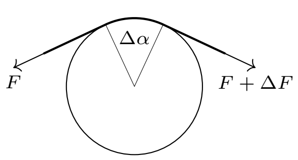


Rys. 3

Rozwiązując układ równań (1) – (3), otrzymujemy

$$U = \varepsilon_0 vBS/(C + 2\varepsilon_0 S/d).$$

747. Rozważmy mały element Δl sznurka na belce oparty na kącie $\Delta\alpha$ (rys. 4). Sąsiednie odcinki liny działają na ten element siłami napięcia F i $F + \Delta F$. Różnica wartości tych sił spowodowana jest siłą tarcia ΔT. Dla małego elementu zwoju $\Delta F/F \ll 1$. Wartość siły nacisku elementu sznurka na belkę $\Delta N = F\Delta\alpha$. Siła tarcia $\Delta T = \mu\Delta N = \mu F\Delta\alpha$, gdzie μ jest współczynnikiem tarcia. Uwzględniając, że $\Delta F = \Delta T$, otrzymujemy równanie



Rys. 4

$$dF/d\alpha = \mu F(\alpha).$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja proporcjonalna do swojej pochodnej, czyli

$$F(\alpha) = F(0)\exp(\mu\alpha).$$

Dla ustalonego kąta α zachodzi $F(\alpha)/F(0) = const$. W naszym przypadku, kiedy chcemy podnieść ciężar, siła tarcia jest skierowana przeciwnie do siły F_2 i już nie pomaga, a przeszkadza: $mg/F_1 = F_2/mg$. Stąd

$$F_2 = (mg)^2/F_1 = 90\text{N}.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
742 (WT = 2,91), 743 (WT = 3,1)
z numeru 9/2022

Sławomir Buć	Mystków	1–44+2,81
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	4–36,59
Jan Zambrzycki	Białystok	3–36,35
Jacek Konieczny	Poznań	33,42
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2–33,14

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.