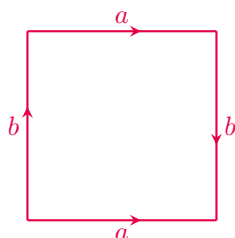


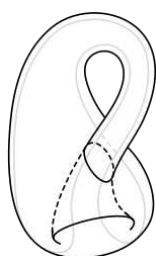
Z butelki Kleina i Salomon nie należy?

Michał MIŚKIEWICZ*

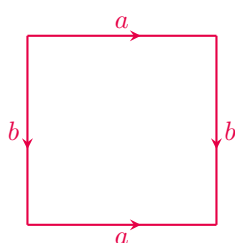
*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW; Instytut Matematyczny PAN



Rys. 1. Diagram opisujący butelkę Kleina przez sklejenie a z a oraz b z b



Rys. 2. Poglądowa (nieco ułomna) ilustracja butelki Kleina. Nieszczelność takiej butelki pokazuje filmik *How to fill a Klein bottle* dostępny na kanale Numberphile: youtu.be/dfhiVaJj9UY



Rys. 3. Diagram opisujący torus przez sklejenie

Podana definicja została przyjęta jedynie na potrzeby niniejszego artykułu, a nie jest terminem zaczerpniętym z fachowej literatury. Zdecydowanie nie jest też jedyną możliwą definicją i zachęcam Czytelnika do zbadania innych – być może bardziej naturalnych – możliwości.

Butelka Kleina to bardzo dziwna butelka. Otrzymuje się ją poprzez sklejenie boków kwadratu z rysunku 1 zgodnie ze strzałkami. Dla topologa opis taki będzie wystarczający – domyśli się on, że przez *sklejenie* rozumiemy tu abstrakcyjną operację *utożsamienia* odpowiednich par punktów – ale dla lepszego obrazu sytuacji prześledźmy krok po kroku, jak takie sklejenie mogłoby wyglądać. Korzystając z trzeciego wymiaru, możemy wygiąć kwadrat i skleić strzałki a , otrzymując powierzchnię boczną walca. Deformując materiał jeszcze bardziej, możemy zgiąć walec niczym podkowę, by zbliżyć jego podstawy do siebie i... przekonać się, że strzałki b wskazują w złą stronę!

Znana ilustracja z rysunku 2 prezentuje jedno z rozwiązań tego problemu. Żeby zetknąć strzałki b w zgodzie z zadaną orientacją, wycinamy mały otwór w walcu, a następnie jedną z części podkowy przeprowadzamy przez ten otwór na spotkanie drugiej części, niejako *od środka*. W ten sposób strzałki b spotykają się w prawidłowy sposób.

Warto samodzielnie wykonać eksperyment myślowy: **co stanie się, gdy napelnimy butelkę Kleina wodą?** Czy będzie ona szczelnie zamknięta? A najlepiej zacząć od refleksji: **co to znaczy, że woda znajduje się we wnętrzu butelki Kleina?**

Patrząc na rysunek 2, można zauważyć, że wodę umieszczoną w baniastej części butelki łatwo wylać, odpowiednio obracając całą butelkę. Jest to związane z *jednostronnością* butelki Kleina. Cecha ta – wspólna ze znaną szerzej *wstęgą Möbiusa* – oznacza, że małą kulkę umieszczoną na powierzchni zawsze możemy przetoczyć tak, by znalazła się w tym samym miejscu powierzchni, ale po drugiej stronie.

Przypomnijmy jednak, że nasza ilustracja nie przedstawia prawdziwej butelki Kleina, a jedynie butelkę z wyciętą dziurą, co tłumaczy zauważoną nieszczelność. Dziurę tę możemy załatać, na powrót dodając brakujący dysk. Otrzymana powierzchnia ma wtedy samoprzecięcie. Jest to tzw. *immersja* butelki Kleina i dobrze oddaje jej geometrię, jeśli tylko będziemy pamiętać, że samoprzecięcie jest tylko cechą naszej ilustracji, a sama butelka tego przecięcia nie ma. Pozostaje jednak problem *jednostronności* i wydaje się on skutecznie uniemożliwiać wyróżnienie wnętrza i zewnątrz butelki.

A z czego da się nalać? Żeby lepiej zrozumieć, gdzie leży problem, wskaźmy pewne przykłady pozytywne. Problemu ze szczelnością nie ma na przykład sfera. Przedmioty umieszczone wewnątrz niej – czyli w kuli – nie wydostaną się na zewnątrz.

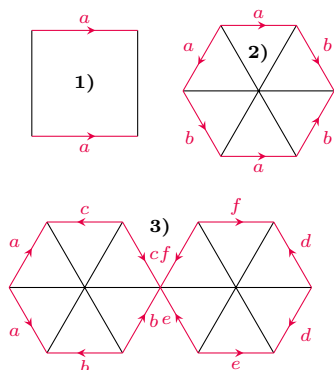
Szczelny jest też bliski kuzyn butelki Kleina – torus – zdefiniowany jako kwadrat skleiony zgodnie z diagramem pokazanym na rysunku 3. Kiedy przystępujemy do przestrzennego sklejania, nie napotykaemy na problem niezgodności i otrzymujemy znajomy kształt dętki rowerowej. Przykładowym opisem tego kształtu w \mathbb{R}^3 będzie zbiór punktów

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Podobnie jak dla sfery, łatwo znajdujemy jego wypełnienie – jest to zbiór opisany tą samą formułą, tylko z równością = zamienioną na znak nierówności \leq .

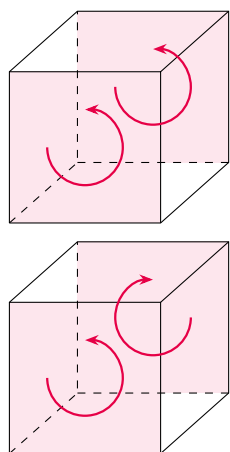
Dotychczasowa opowieść o *szczelności* jest nieściśła, więc może się wydawać jałowa. Żeby tego uniknąć, na podstawie powyższych trzech przykładów zaproponuję następującą definicję wypełnienia powierzchni:

Definicja. Umówimy się, że powierzchnię \mathcal{S} da się wypełnić, jeśli istnieje figura trójwymiarowa \mathcal{M} , dla której *brzegiem* jest powierzchnia \mathcal{S} .

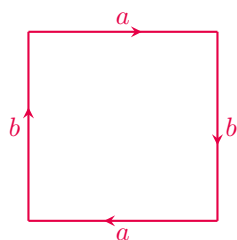


Rys. 4. Przykłady opisów sklejeń, które nie zadają powierzchni zgodnie z definicją:

- 1) walec ma niesparowane krawędzie (należące do tylko jednego wielokąta),
- 2) trąbka Borsuka ma krawędzie należące do trzech wielokątów,
- 3) bukiet dwóch sfer ma wierzchołek należący do sześciu wielokątów, które jednak nie są kolejno połączone krawędziami (za to układają się w dwa cykle)



Rys. 5. Trójwymiarowe diagramy opisujące, odpowiednio, wypełnienie torusa oraz butelki Kleina



Rys. 6. Płaszczyzna rzutowa – trzecia możliwość sklejenia kwadratu w zamkniętą powierzchnię

Od razu wyjaśnijmy kilka terminologicznych niejasności:

- Jako powierzchnię \mathcal{S} dopuszczamy nie tylko powierzchnię w \mathbb{R}^3 , ale każdą powierzchnię opisaną przez sklejenie pewnej liczby wielokątów, o ile po sklejeniu każda krawędź jest wspólna dla dokładnie dwóch wielokątów, a każdy wierzchołek należy do pewnej liczby wielokątów kolejno połączonych krawędziami (warunki te wykluczają istnienie brzegu oraz różne niepożądane osobliwości).
- Podobnie, za dopuszczalną figurę trójwymiarową \mathcal{M} uznamy efekt sklejenia pewnej liczby wielościanów, przy czym ponownie wymagamy, by przepis ten wykluczał osobliwości.
- Dopuszczamy jednak, że niektóre ściany w opisie sklejenia \mathcal{M} nie są sklezione z żadną inną ścianą. Powierzchnię opisaną przez sklejenie samych niesparowanych ścian (z pominięciem reszty) będziemy nazywać *brzegiem* \mathcal{M} . W definicji żądamy, by brzeg ten był tożsamy z powierzchnią \mathcal{S} .
- *Nie żądamy*, by sklejenie było fizycznie wykonalne w przestrzeni trójwymiarowej; dopuszczamy więc w szczególności butelkę Kleina jako prawidłowo określoną powierzchnię.

A jednak się da! W świetle przyjętej definicji da się znaleźć wewnątrz dla butelki Kleina. Zaczniemy jednak od przykładów.

Figurą o brzegu będącym sferą jest na przykład pojedyncza kostka jednostkowa (sześcian) $[0, 1]^3$, bez potrzeby sklejan. Brzegiem jest tutaj oczywiście powierzchnia sześcianu, jednak jeśli przyjmiemy – tak jak do tej pory – tolerancyjne podejście do deformowania powierzchni, to po pewnym napompowaniu otrzymamy sferę.

W przypadku torusa możliwość wypełnienia można zauważyć już na etapie sklejan, gdy mamy do czynienia z walcem; walec ma przecież wypełnienie! Rozważmy więc znowu kostkę $[0, 1]^3$ (po napompowaniu odpowiadającą pełnemu walcowi), jednak tym razem ze sklejonymi dwiema przeciwległymi ścianami jak na rysunku 5. Jest to przykład figury, o jakiej mowa w definicji. A brzeg? Niesparowane ściany po dokonaniu sklejenia (przepis nakazuje sklejenie dwóch zamkniętych łamanych) tworzą torus.

Z tej perspektywy nie jest trudno znaleźć wypełnienie również dla butelki Kleina – wystarczy na poprzednim diagramie zmodyfikować przepis sklejan przeciwległych ścian. Zachęcam do samodzielnego przekonania się, że otrzymany przepis nie powoduje powstania osobliwości, a sklejenie brzegu daje właśnie butelkę Kleina.

Z wielu możliwych refleksji, jakie pociąga za sobą zarysowane wyżej abstrakcyjne spojrzenie, chciałbym wyróżnić jedną. Mianowicie również **jednostronność nie jest cechą powierzchni, a jedynie jej przestrzennej reprezentacji**. Przykładem tego jest butelka Kleina, ale prostszy przykład można zauważyć już wymiar niżej. Otóż każdy okrąg na płaszczyźnie ma dwie strony (po jednej z nich jest koło), ale już okrąg poprowadzony wzdłuż wstęgi Möbiusa ma tylko jedną, o czym łatwo się przekonać, rozcinając wstęgę Möbiusa wzdłuż takiej krzywej na dwa kawałki (no właśnie! czy na pewno dwa?). Może to naprowadzić Czytelnika na słuszny trop łączący jednostronność powierzchni z orientowalnością zarówno jej samej, jak i otaczającej przestrzeni.

Ciąg dalszy. Wielu Czytelników *Delty* zna jeszcze jednego kuzyna butelki Kleina i torusa – płaszczyznę rzutową. Niestety, płaszczyzna rzutowa wypełnienia nie posiada.

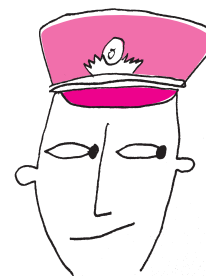
Po poznaniu tylu pozytywnych przykładów ta negatywna odpowiedź może zaskakiwać. Tym bardziej, że jak mielibyśmy wykazać niemożliwość znalezienia wewnątrz? Wszak możliwych przepisów sklejeń jest nieskończenie wiele. Czytelnik odpowiednio doświadczony zapewne przeczuwa, że odegra tu rolę pewien niezmiennik. I słusznie! Będzie nim charakterystyka Eulera. Nie wnikając w szczegóły, dla powierzchni złożonej z F wielokątów, E krawędzi i V wierzchołków jest to liczba $\chi = V - E + F$; okazuje się, że nie zależy ona

$$\begin{aligned}\chi(\text{sfera}) &= 2 \\ \chi(\text{torus}) &= 0 \\ \chi(\text{but. Kleina}) &= 0 \\ \chi(\text{pl. rzut.}) &= 1\end{aligned}$$

od wybranego podziału powierzchni na wielokąty, i właśnie dlatego nazywamy ją niezmiennikiem. Charakterystyki Eulera interesujących nas powierzchni podałem na marginesie – polecam wyliczyć je samodzielnie. Płaszczyzna rzutowa wyróżnia się na naszej liście tym, że jej charakterystyka jest nieparzysta. Pozostaje nam więc przekonać się, że:

Twierdzenie. *Jeśli powierzchnię \mathcal{S} da się wypełnić, to jej charakterystyka Eulera $\chi(\mathcal{S})$ jest liczbą parzystą.*

Twierdzenie to nie jest łatwe. Zachęcam więc Czytelnika do samodzielnego zbadania wybranych przypadków, a pełny dowód będzie można przeczytać już za miesiąc.



36 splątanych oficerów z Petersburga

Grzegorz RAJCHEL-MIELDZIOĆ^{1,2}, Wojciech BRUZDA³,
Adam BURCHARDT^{3,4}, Karol ŻYCKOWSKI^{2,3}

¹ ICFO-Institut de Ciencies Fotoniques, The Barcelona Institute of Science and Technology,

² Centrum Fizyki Teoretycznej, Polska Akademia Nauk,

³ Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Jagielloński,

⁴ QuSoft, CWI and University of Amsterdam

Kwadraty magiczne oraz kwadraty grecko-łacińskie zna każdy Czytelnik *Lilāvati* [1] oraz *Śladami Pitagorasa* [2]. Takie obiekty są z jednej strony wdzięcznym przedmiotem rozważań matematyki rozrywkowej, ale też powiązane są z istotnymi problemami kombinatorycznymi, jak również ułatwiają optymalne planowanie eksperymentów.

Rozważmy konstrukcję znaną co najmniej od XIII wieku [3], kwadrat łaciński. Jest to tablica o wymiarze d na d , wypełniona d elementami (np. literami alfabetu łacińskiego) w ten sposób, że elementy nie powtarzają się w żadnym wierszu ani kolumnie. Przykład wymiaru 3 przedstawia rysunek 1. Przykład ten stworzony został z pierwszego wiersza (A, B, C) poprzez translację – drugi wiersz przesuwamy o jeden, otrzymując (B, C, A). Z kolei trzeci wiersz jest przesunięty o dwa elementy, (C, A, B). Nietrudno zauważyć, że konstrukcja poprzez translację ma swoje uogólnienie na kwadrat o dowolnym wymiarze d , co dowodzi, że kwadraty łacińskie istnieją dla dowolnego d .

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Rys. 1. Kwadrat łaciński o wymiarze 3. Elementy nie powtarzają się w żadnym wierszu ani kolumnie

Oczywiście kiedy zamienimy litery na dowolne inne symbole, nowy kwadrat łaciński nie będzie się różnił od wyjściowego (można powiedzieć, że są w tej samej klasie równoważności ze względu na zamianę symboli), jak w przykładzie na rysunku 2, gdzie użyjemy symboli stosowanych w kartach do gry.

Czy jednak wszystkie kwadraty łacińskie o danym wymiarze są *takie same* i należą do tej samej klasy równoważności? Odpowiedź brzmi: nie! Skoro tak, to które kwadraty są od siebie najbardziej różne? By odpowiedzieć na to pytanie, najprościej *dodać* je do siebie, dołączając greckie litery dla odróżnienia kolejności kwadratów.

Zacznijmy od dwóch takich kwadratów, które z całą pewnością nie są różne, ponieważ drugi powstaje z pierwszego poprzez zastąpienie liter łacińskich greckimi.

$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	\equiv	A♥	K♠	Q♦
$B\beta$	$C\gamma$	$A\alpha$		K♠	Q♦	A♥
$C\gamma$	$A\alpha$	$B\beta$		Q♦	A♥	K♠

Rys. 2. Po lewej stronie równości: dwa identyczne, dodane do siebie kwadraty łacińskie o wymiarze 3, gdzie w drugim kwadracie zamieniliśmy litery łacińskie na greckie: $A \rightarrow \alpha$, $B \rightarrow \beta$ oraz $C \rightarrow \gamma$. Po prawej stronie: równoważny układ, w którym rolę liter łacińskich przyjęły figury karciane, a litery greckie zastąpiono symbolami kolorów. Zauważmy, że każda figura występuje zawsze w tym samym kolorze

Każdy element na rysunku 2 jest parą liter – możliwości stworzenia różnych par jest $3 \times 3 = 9$. Skoro jednak dodawaliśmy takie same kwadraty łacińskie, to w tym przykładzie występują tylko 3 różne: $A\alpha$, $B\beta$ i $C\gamma$.



Rozwiązanie zadania M 1739.

Ponieważ AED jest trójkątem równoramiennym, to BCE jest również równoramienny. Wobec tego $DF = CE = CB$ i $\sphericalangle ADF = \sphericalangle EBC$, ponadto $AD = BE$, skąd AFD jest przystającym do trójkąta równoramiennego BCE . Wobec tego $PF \parallel AD$, zatem $\sphericalangle PFD = 180^\circ - \sphericalangle ADF = \sphericalangle AEF$, czyli AE i PF są symetryczne względem symetralnej odcinka FE , będącego średnicą Ω . Zatem P i A są również symetryczne względem tej średnicy, a stąd czworokąt $AEPF$ jest trapezem równoramiennym – w szczególności można na nim opisać okrąg.