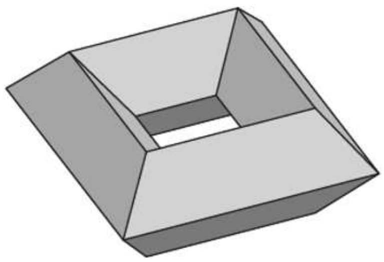


Wielościan toroidalny
$F + V - E = 16 + 16 - 32 = 0$

Eulera, nie musi być równa 2. Tak jest na przykład z wielościanami toroidalnymi, homeomorficznymi z torusem. Posypały się dalsze uogólnienia... [Michał Miśkiewicz, *Czy Ziemia jest płaska? A może jednak?*, $\Delta^{10}_{16}$, oraz tekst na stronie 1].

I pomyśleć, że gdyby nie poszukiwania Leibniza, to nic nie wiedzielibyśmy o *De solidorum elementis*, ważnym dziele Kartezjusza o wielościanach, od którego to wszystko się zaczęło i w którym dojrzeć można zalążki przyszłej całej nowej dziedziny matematyki [zobacz też: Grzegorz Łukaszewicz, *Leonardo da Vinci i topologia*, $\Delta^{4}_{22}$].

Czytelnikowi niniejszego artykułu proponujemy przeprowadzenie własnego dochodzenia i na jego podstawie zdecydowanie (choćby tylko na własny użytek), jak powinno się nazywać rozważane twierdzenie $F + V - E = 2$ – twierdzeniem Kartezjusza–Eulera czy twierdzeniem Eulera, a może twierdzeniem Kartezjusza?


**Bibliografia:**

[1] Amir D. Aczel, *Descartes' Secret Notebook*, New York, Broadway Books, 2005.
[2] René Descartes, *Exercices pour les éléments des solides: Progymnasmata de solidorum elementis – Essai en complément d'Euclid*, Edition critique avec introduction, traduction, notes et commentaires par Pierre Costabel, Paris, 1987.
[3] Pasquale J. Federico, *Descartes on Polyhedra: a study of the De Solidorum Elementis*, Springer-Verlag, 1982.
[4] Imre Lakatos, *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, Tikkun, 2005.
[5] George Polya, *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton University Press, 1954.
[6] David S. Richeson, *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press, 2012.
[7] Chikara Sasaki, *Descartes's Mathematical Thought*, Springer, 2003.
[8] John Stillwell, *Mathematics and Its History*, 2nd ed., Springer, 2002.


# Jak pan Marek wybierał gospodarza


*Oskar SKIBSKI**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

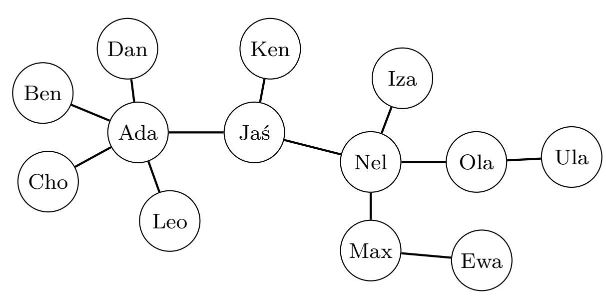

Pan Marek, nauczyciel informatyki i wychowawca klasy 2B, leżał na kanapie w kantorku przy sali informatycznej i oddawał się swojej ulubionej rozrywce – czytał *Deltę*. Po tym, jak rok temu wybory na przewodniczącego klasy doprowadziły do sporej awantury, pan Marek postanowił, że w tym roku to on zdecyduje, kto będzie przewodniczącym. I właśnie powinien to zrobić, jednak strasznie mu się nie chciało.

Te niefortunne wybory opisaliśmy w artykule „Jak Leo uratował klasowe wybory", $\Delta^{9}_{21}$.

Wertował akurat stary numer *Delty* i trafił na artykuł o tym, jak analizując sieć połączeń, można wskazać kluczowego terrorystę ($\Delta^{11}_{16}$). „Szkoda, że moi uczniowie nie są terrorystami" – pomyślał. „Użyłbym jednej z tych metod i miałbym problem z głowy". Ale w sumie... gdyby tak stworzyć sieć społeczną klasy? Wtedy moglibyśmy użyć jakiejś metody opisanej w artykule do wskazania osoby, która jest najbardziej centralna. Ona powinna być niezłym gospodarzem!

Pan Marek narysował imiona 13 uczniów swojej klasy na kartce i podekscytowany popędził do komputera, gdzie uruchomił zapis monitoringu z ostatniego miesiąca (jak dobrze, że jego szkoła jest taka nowoczesna!). Każdą parę uczniów, którzy chociaż raz siedzieli w jednej ławce, połączył krawędzią. Powstał taki graf:

*Graf* to profesjonalne słowo oznaczające „kropki połączone kreskami". Kropki reprezentują jakieś obiekty i nazywane są zwykle wierzchołkami. Kreski, nazywane krawędziami, wskazują, które obiekty coś łączy.




Pan Marek przejrzał metody opisane w pracy, ale okazało się, że trzy standardowe miary centralności (miary stopnia, bliskości i pośrednictwa) wskazują różne osoby (odpowiednio Adę, Jasia i Nel)! Po wczytaniu się w ich opis zdecydował się użyć miary bliskości (*closeness centrality*), która każdemu

**Rozwiązanie zadania F 1069.**
Każdy z zakrętów zostanie pokonany ze stałą prędkością kątową $\omega$ – dla każdego zakrętu inną. Wykonanie zakrętu o kąt $\alpha$ wymaga czasu $t = \alpha/\omega$. Czas będzie minimalny, gdy $\omega$ będzie maksymalne. Maksymalną wartość $\omega$ otrzymamy, porównując siłę tarcia z wartością siły dośrodkowej potrzebnej do utrzymania ruchu po okręgu o promieniu $r$: $\omega^2 r \leqslant fg$. Otrzymujemy:

$$t = \frac{\alpha}{\omega} \geqslant \alpha\sqrt{\frac{r}{fg}}.$$

Z powyższego wzoru wynika, że stosunek czasów wynosi:

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}414,$$

a więc pokonanie zakrętu o większym promieniu, mimo że pokonujemy go z większą maksymalną prędkością, zajmie nam więcej czasu. Dla zaspokojenia ciekawości obliczmy, ile wynoszą czasy $t_1$ i $t_2$: $t_1 \approx 6{,}9$ s, $t_2 \approx 4{,}9$ s. 170 m to minimalny promień zakrętu, jaki można pokonać z maksymalną prędkością 140 km/h, dozwoloną na polskich autostradach (przy idealnych warunkach: sucha nawierzchnia nie pokryta piaskiem, liśćmi itp.).

wierzchołkowi przypisuje odwrotność sumy odległości do innych. Odległość to po prostu liczba krawędzi, jaką musiałby pokonać uczeń, aby dojść do drugiego.

Najwyższą bliskość ma Jaś: ma on 3 *sąsiadów*, czyli osoby połączone z nim krawędzią (takiego określenia używa się w teorii grafów i u nas też pasuje ono bardzo dobrze), siedem osób w odległości 2 oraz dwie osoby w odległości 3. Jego bliskość to zatem 1/23, czyli jest wyższa niż bliskość Nel (1/24) i Ady (1/26). Jaś zostanie gospodarzem!

Formalnie, dla grafu $G = (V, E)$, *bliskością* wierzchołka $v \in V$ nazwiemy wartość:

$$C_v(G) = 1/\sum_{u \in V} d(u, v),$$

gdzie $d(u, v)$ to odległość pomiędzy wierzchołkami $u$ i $v$, czyli długość najkrótszej ścieżki, która zaczyna się w $u$ i kończy w $v$.

Zadowolony z siebie pan Marek wrócił na kanapę i chwycił nowszy numer *Delty*, z maja 2022 roku. Po chwili lektury (i krótkiej wycieczce do nauczyciela fizyki, aby przetestować, czy ogórek rzeczywiście świeci) wychowawca trafił na artykuł Grzegorza Pierczyńskiego *„Jak liczyć głosy?”* ($\Delta^5_{22}$). W artykule opisano grupę studentów, którzy wybierają restaurację na wspólne wyjście, oraz parę metod wyborczych, które mogą im w tym pomóc. „Hmmm... może powinienem jednak użyć którejś metody opisanej tutaj. Leo czyta *Deltę*, znowu może kwestionować mój wybór”.

Nauczyciel wczytał się więc w metodę Condorceta. Aha, dla każdej pary musimy obliczyć, kto dostałby więcej głosów, gdyby zorganizować wybory, w których tylko oni by startowali. Jeżeli jest ktoś, kto wygrywa w takich pojedynkach jeden na jeden z każdą inną osobą, to jest on nazywany zwycięzcą condorcetowskim i powinien zostać wybrany.

Tylko jak użyć tej metody w naszej sytuacji? Możemy podejrzewać, że każda osoba woli, aby to jej kolega został gospodarzem niż ktoś, z kim się nie przyjaźni. Jeżeli żaden kolega nie zostanie wybrany, to byłoby miło, gdyby przynajmniej kolega kolegi nim został. I tak dalej. Przyjmiemy więc, że spośród dwóch kandydatów uczeń wybierze tego, który jest bliżej do niego w grafie (jeżeli kandydaci będą równie daleko, to nie zagłosuje on w ogóle). Porównując dwie osoby, np. Jasia i Nel, musimy zatem obliczyć, ile osób jest bliżej Jasia niż Nel (jest ich 7, licząc Jasia) i ile osób jest bliżej Nel niż Jasia (jest ich 6); zwycięzcą zostaje osoba, która ma więcej osób bliżej siebie, czyli Jaś.

Niech $\mathrm{Net}(u, v)$ będzie liczbą wierzchołków, które są bliżej wierzchołka $u$ niż wierzchołka $v$:

$$\mathrm{Net}(u, v) = |\{w \in V : d(u, w) < d(v, w)\}|.$$

Powiemy, że $u$ *wygrywa* z $v$, jeżeli zachodzi $\mathrm{Net}(u, v) > \mathrm{Net}(v, u)$.

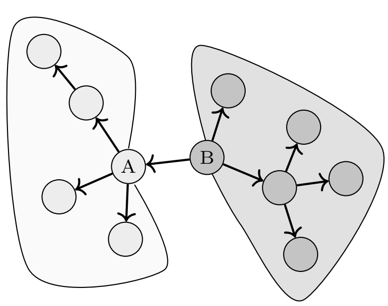
Pan Marek szybko sprawdził, że Jaś nie tylko wygrywa z Nel, ale też z Adą i wszystkimi innymi osobami! Czyli Jaś nie tylko ma najwyższą bliskość, ale także jest zwycięzcą condorcetowskim! Ufff... ale fart. Ale czy na pewno?

Okazuje się, że nie. W drzewach, czyli grafach, w których z każdego wierzchołka do każdego innego prowadzi dokładnie jedna ścieżka, tak jest zawsze.

**Twierdzenie.** *W drzewie zwycięzca condorcetowski ma zawsze najwyższą bliskość.*

Z artykułu o metodzie Condorceta wiemy, że zwycięzca condorcetowski może nie istnieć. Jeżeli mamy parzystą liczbę wierzchołków w drzewie, to rzeczywiście może się tak zdarzyć. Istnieją jednak wówczas dwa wierzchołki, które remisują ze sobą i wygrywają pojedynki z wszystkimi innymi; można pokazać, że mają one też najwyższą bliskość.

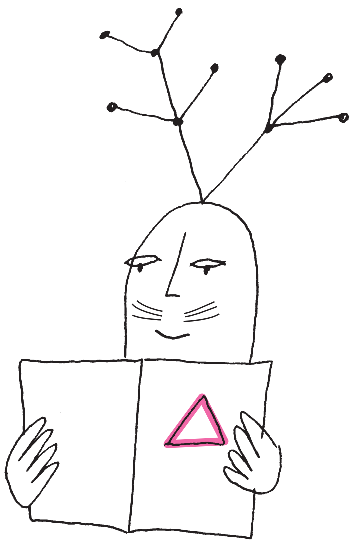
Aby to zobaczyć, rozpatrzmy najpierw dwóch sąsiadów: $A$ i $B$. W drzewie krawędź dzieli wszystkie osoby na dwie grupy: osoby po stronie $A$ i osoby po stronie $B$. Osoba, po której stronie jest więcej osób, wygra: oczywiście osoby po stronie $A$ zagłosują na $A$, a po stronie $B$ na $B$.



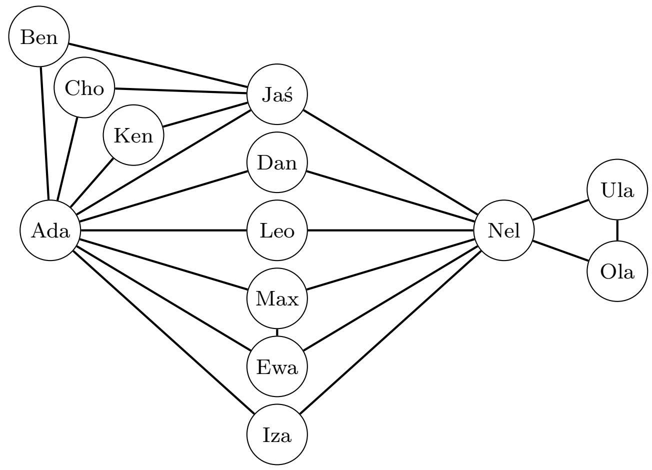
Przykładowe drzewo podzielone na dwie strony krawędzią $AB$. Krawędzie są skierowane w taki sposób, aby prowadziły od wierzchołka, który wygrywa do przegranego

Popatrzmy teraz na odległości obu osób. Osoba $A$ ma o jeden dłuższą drogę do wszystkich osób po stronie $B$. Z kolei osoba $B$ ma o jeden dłuższą drogę do wszystkich osób po stronie $A$. A zatem jeżeli porównamy sumy odległości obu osób, okaże się, że ich różnica jest równa dokładnie różnicy pomiędzy licznością stron i będzie mniejsza dla osoby, która ma po swojej stronie więcej osób. A skoro będzie dla niej mniejsza, to jej bliskość będzie wyższa!

Widzimy więc, że spośród dowolnych dwóch sąsiadów ten, który wygrywa, ma też wyższą bliskość! Łatwo też zauważyć, że tylko jeden z sąsiadów może z nami wygrać, czyli jeżeli $B$ ma dwóch sąsiadów $A$ i $C$, to jeśli $A$ wygrywa z $B$, to $B$ wygrywa z $C$. Wynika to z tego, że jeżeli $A$ wygrywa z $B$, to znaczy, że po jego stronie jest więcej niż połowa wierzchołków i po stronie $C$ już tyle być nie może. Teraz jeżeli istnieje zwycięzca condorcetowski, to oczywiście wygrywa on ze swoimi sąsiadami, a oni wygrywają ze swoimi pozostałymi sąsiadami, którzy wygrywają ze swoimi i tak dalej. Oznacza to, że zwycięzca condorcetowski ma wyższą bliskość niż sąsiedzi, którzy mają wyższą bliskość niż pozostali sąsiedzi i tak dalej. A zatem zwycięzca condorcetowski ma najwyższą bliskość!

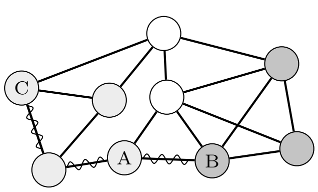


„Ciekawe...” – pomyślał pan Marek. – „Czy tak jest jednak w dowolnym grafie?”. Pan Marek pobiegł do komputera i zaczął przeglądać nagrania z korytarzy. Dla każdej pary, która ze sobą rozmawiała na korytarzu, dorysował krawędź. Kiedy poprzestawiał trochę wierzchołki, powstał następujący, trochę dziwny, graf:




„Ile ta Ada gada!” – pomyślał pan Marek, po czym szybko sprawdził, że dzięki swojej gadatliwości w tym grafie Ada wygrywa z Nel i Jasiem, a także ze wszystkimi pozostałymi osobami. Jest więc zwycięzcą, a właściwie zwyciężczynią condorcetowską. Natomiast to Nel ma najwyższą bliskość. Obie metody w ogólnych grafach nie dają zatem tego samego wyniku!

Zastanówmy się, co się zmieniło. Weźmy najpierw dwie dowolne osoby, $A$ i $B$, połączone krawędzią i niech $C$ będzie dowolnym innym wierzchołkiem. Zauważmy, że odległości $C$ do $A$ i $B$ mogą różnić się maksymalnie o 1: na przykład gdyby najkrótsza ścieżka z $C$ do $A$ była dłuższa o 2 od najkrótszej ścieżki z $C$ do $B$, to przecież moglibyśmy ją zamienić na ścieżkę z $C$ do $B$ przedłużoną o krawędź $AB$ – sprzeczność. Wszystkie wierzchołki w grafie możemy zatem podzielić na trzy grupy: wierzchołki równoodległe od $A$ i $B$, bliższe o 1 do $A$ oraz bliższe o 1 do $B$. Różnica sumy odległości to teraz różnica liczności tych dwóch ostatnich grup. A zatem w dowolnych grafach także jest prawdą, że spośród sąsiadów ten, który ma więcej wierzchołków bliżej i wygrywa pojedynek jeden na jeden, ma wyższą bliskość.




Przykładowy graf. Wierzchołki białe są równoodległe od $A$ i $B$. Jasnoszare wierzchołki są bliższe o 1 do $A$, a ciemne – bliższe o 1 do $B$. Falowana linia prezentuje (pewną) najkrótszą ścieżkę z $C$ do $B$

Czemu nie możemy więc pokazać, że zwycięzca condorcetowski ma najwyższą bliskość? O ile w drzewach prawdą jest, że tylko jeden z naszych sąsiadów może z nami wygrywać, o tyle w dowolnych grafach nie jest to już prawdą. Na przykład w grafie korytarzowych rozmów Jaś przegrywa zarówno z Adą, jak i Nel. Prawdą jest zatem, że Ada, zwyciężczyni condorcetowska, ma wyższą bliskość niż jej sąsiedzi, ale jej sąsiedzi (np. Jaś) niekoniecznie mają wyższą bliskość niż ich pozostali sąsiedzi. Analogiczny argument zatem nie działa. Prawdą jest też, że Nel, osoba z najwyższą bliskością, wygrywa ze wszystkimi swoimi sąsiadami. Obie osoby nie muszą być jednak tą samą.

„Szkoda... Ale jest na to metoda – wystarczy, że nie pokażę tego grafu klasie” – stwierdził pan Marek i szybko wymazał powiększony graf. Ada nigdy się nie dowie, jak blisko była zwycięstwa.

* * * * *

Pan Marek poczynił wiele naukowych odkryć, które pokazują, że analizę sieci społecznych i teorię wyboru społecznego łączy więcej, niż można było podejrzewać. Wynotował sobie także na marginesie ciekawe pytania, na które jeszcze nie zna odpowiedzi. Może Ty, Czytelniku, pomógłbyś mu znaleźć na nie odpowiedzi?

**Pytanie 1.** Czy dla dowolnych dwóch wierzchołków w drzewie ten, który wygrywa, ma wyższą bliskość?

**Pytanie 2.** Czy jeżeli dwa wierzchołki w drzewie mają różną odległość od zwycięzcy condorcetowskiego, to ten będący bliżej wygrywa z drugim?

**Pytanie 3.** Czy w grafie może istnieć cykl Condorceta, czyli sytuacja, w której wierzchołek $A$ wygrywa z $B$, $B$ z $C$ i $C$ z $A$ (czyli jest więcej wierzchołków bliżej $A$ niż $B$, więcej bliżej $B$ niż $C$ i więcej bliżej $C$ niż $A$)?

**Pytanie 4.** Czy zmieniając krawędzie tylko Bena i Nel w powyższym powiększonym grafie, da się skonstruować graf, w którym to Nel jest zwyciężczynią condorcetowską, ale Ada i Nel mają niezmienione zbiory odległości do innych (tzn. Ada ma 9 sąsiadów, 1 osobę w odległości 2 i 2 w odległości 3; z kolei Nel ma 8 sąsiadów i 4 osoby w odległości 2)?

Odpowiedzi na stronie 5.