

płaszczyzny rzutowej. Rozważamy dublet \mathcal{D} – siatkę złożoną z dwóch kopii \mathcal{S} , ale z dodatkowym sklejeniem odpowiadających ścian \mathcal{P} w jednej i drugiej kopii. Otrzymaliśmy w ten sposób regularną siatkę trójwymiarową bez brzegu, co na mocy naszego twierdzenia pozwala wnioskować, że $\chi(\mathcal{D}) = 0$.

Ostatnim brakującym elementem układanki jest charakterystyka Eulera \mathcal{P} . Łatwo odczytać, że charakterystyka siatki z rysunku 7 wynosi $3 - 6 + 4 = 1$, nie jest jednak oczywiste, że będzie tak dla dowolnej siatki. Można jednak ten problem sprowadzić do przypadku sfery (ze względu na trudność niech będzie to zadanie z gwiazdką), przyjmiemy więc za znane, że $\chi(\mathcal{P}) = 1$.

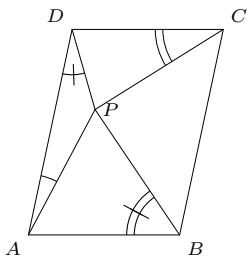
Zadanie 6*. Mając zadaną siatkę \mathcal{S}_1 na płaszczyźnie rzutowej, skonstruować na sferze siatkę \mathcal{S}_2 o dwukrotnie większej liczbie wierzchołków, krawędzi i ścian. Wywnioskować, że $\chi(\mathcal{S}_1) = 1$.

Czas na podsumowanie. Liczba wierzchołków \mathcal{D} różni się od liczby wierzchołków \mathcal{P} o liczbę parzystą, mianowicie o dwukrotność liczby wierzchołków *we wnętrzu* \mathcal{S} ; tak samo jest zresztą z liczbą ścian dowolnego wymiaru. W konsekwencji również różnica $\chi(\mathcal{D}) - \chi(\mathcal{P})$ jest parzysta. Otrzymana sprzeczność (liczba $0 - 1$ wcale nie jest parzysta!) dowodzi, że płaszczyzna rzutowa nie może być brzegiem. \square

Ciąg dalszy? Badanie abstrakcyjnych rozmaitości (czyli regularnych figur) trójwymiarowych jest niewątpliwie wymagającym zajęciem. Jak to jednak bywa, matematycy poszli jeszcze dalej, i w roku 1954 francuski matematyk René Thom podał pełną odpowiedź na pytanie: które rozmaitości są brzegami, a które nie, i to w dowolnym wymiarze. Jeśli Czytelnik chciałby dowiedzieć się więcej, dalszą drogę polecam zacząć od lektury hasła *Cobordism* (od francuskiego *bord* – brzeg) na Wikipedii. Upprzedzę tylko – droga jest długa!



Zadania



Przygotował Dominik BUREK

M 1741. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle ABP = 2\sphericalangle ADP$ oraz $\sphericalangle DCP = 2\sphericalangle DAP$.

Udowodnij, że $AB = PB = PC$.

Rozwiązanie na str. 8

M 1742. Niech x, a, b, c i d będą parami różnymi liczbami całkowitymi takimi, że

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) - 4 = 0.$$

Udowodnij, że $x = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$.

Rozwiązanie na str. 6

M 1743. Niech n i r będą nieujemnymi liczbami całkowitymi takimi, że żadna z liczb

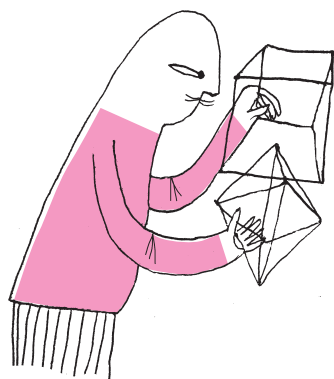
$$n^2 + r - k(k + 1), \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots$$

nie jest liczbą dodatnią złożoną lub równą -1 . Udowodnij, że liczba $4n^2 + 4r + 1$ jest pierwsza albo równa 1 lub 9.

Rozwiązanie na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1069. Podczas jazdy po płaskim torze kierowca ma do pokonania dwa zakręty, które zmieniają kierunek jazdy o 90° i mają promienie $r_1 = 170$ m oraz $r_2 = 85$ m. Kierowca jedzie z maksymalną prędkością, przy jakiej nie wypada jeszcze z drogi. Tor jest wąski – zakręt należy pokonać po łuku okręgu, a nawierzchnia na zakrętach pozostaje pozioma. Jaki jest stosunek czasów, w jakich kierowca pokona te zakręty? Do obliczeń przyjmij, że współczynnik tarcia opon o asfalt wynosi $f = 0,9$. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s².
Rozwiązanie na str. 9



F 1070. Jednym z mechanizmów rozpoznawania kierunku do źródła dźwięku jest rejestracja różnicy czasu dotarcia sygnału do ucha lewego i prawego. Przyjmuje się, że minimalna rozpoznawalna różnica czasów dla uszu człowieka wynosi około $\Delta t = 10$ μ s. Oszacuj, z jaką dokładnością potrafimy ustalić kierunek, z jakiego dociera do nas dźwięk z odległego źródła, gdy stosujemy wspomniany mechanizm? Prędkość dźwięku wynosi $c = 340$ m/s, a średnica ludzkiej głowy (odległość między uszami) wynosi $d \approx 22$ cm.
Rozwiązanie na str. 17