Dynamiki i cięcia

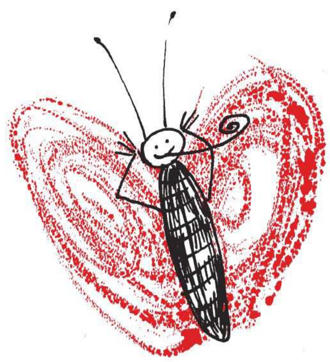
*Jonatan GUTMAN**

* Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Autor tego artykułu chciałby podziękować doktorowi Adamowi Śpiewakowi za cenne uwagi redakcyjne.

Autor dziękuje za wsparcie Narodowego Centrum Nauki w ramach grantu OPUS 2020/39/B/ST1/02329.

Teoria układów dynamicznych jest ważną gałęzią matematyki, powiązaną z naukami przyrodniczymi i inżynierią. *Układ dynamiczny* (albo *dynamika*) składa się ze zbioru X nazywanego *przestrzenią fazową* oraz *reguły ewolucji* $\Phi(x,t) : X \times \mathbb{R} \to X$, o której można myśleć jako o rodzinie funkcji $X \to X$ parametryzowanej liczbami rzeczywistymi. Przestrzeń fazowa to zbiór wszystkich możliwych *stanów świata* (np. położenia i prędkości wszystkich planet Układu Słonecznego), natomiast reguła ewolucji Φ jest funkcją, która dla danego stanu x w chwili 0 określa, do jakiego stanu $\Phi(x,t)$ dojdziemy po czasie t (np. jeśli x mówi o aktualnej pozycji Ziemi w Układzie Słonecznym, to $\Phi(x, 1\text{ rok})$ będzie tą samą pozycją Ziemi, czyli $\Phi(x,0)$). W związku z tym zakładamy, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $\Phi(x,0) = x$ (czyli jeśli czas wcale nie upłynie, to będziemy w tym samym stanie) oraz $\Phi(\Phi(x,t),s) = \Phi(x,t+s)$ (czyli jeśli ze stanu x przejdziemy do stanu za t jednostek czasu, a następnie do stanu za s jednostek czasu, to równie dobrze mogliśmy przejść z x do stanu za $t+s$ jednostek czasu). Będziemy również przyjmować, tak jak to zwykle robi się w *dynamice topologicznej*, że X jest przestrzenią metryczną i zwartą, a funkcja Φ jest ciągła. To techniczne założenia, które przydadzą się nam później w dowodach i nie są potrzebne Czytelnikowi do zrozumienia intuicji przedstawionych w tym artykule.

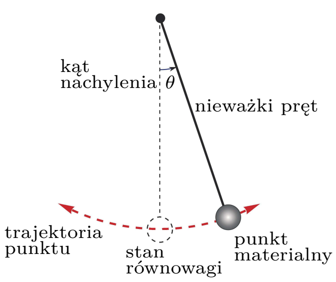


Przykłady układów dynamicznych w naszym życiu można mnożyć w nieskończoność. Wspomniany już ruch planet Układu Słonecznego, zmieniająca się pogoda, produkcja krwinek we krwi, poruszanie się bil po stole bilardowym, ruch cząsteczek gazu w pojemniku, cukier rozpuszczający się w filiżance kawy, zmiany giełdowe, formowanie się korków w ruchu drogowym – to wszystko przykłady układów dynamicznych.

Przeanalizujemy teraz jeden z najbardziej klasycznych przykładów układu dynamicznego, czyli *wahadło matematyczne*. To wyidealizowany model wahadła, które składa się z punktu materialnego o masie m znajdującego się na końcu nieważkiego pręta o długości ℓ. Oznaczmy przez $\theta(t)$ kąt wychylenia pręta w chwili t mierzony względem *stanu równowagi*, czyli sytuacji, kiedy punkt znajduje się nieruchomo w najniższym położeniu. Czytelnik, który poznał już równania różniczkowe, może łatwo wyprowadzić z zasad dynamiki Newtona równanie opisujące ruch wahadła:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta),$$

gdzie g to przyspieszenie grawitacyjne, a symbolem $\ddot{\theta}$ oznaczamy drugą pochodną funkcji $\theta(t)$.



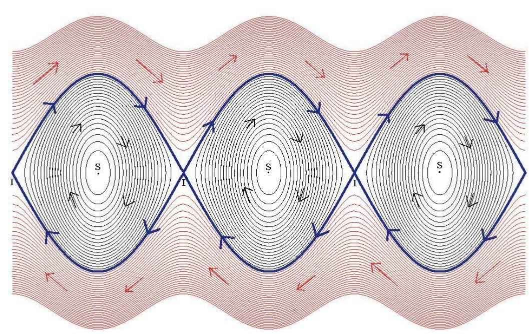
Rys. 1. Źródło: Wikipedia

Stan wahadła możemy opisać przez jego położenie i prędkość. Ponieważ chcemy, aby przestrzeń stanów była zwarta, załóżmy, że mamy ograniczenie na maksymalną energię poruszającego się punktu. W takim razie mamy też ograniczenie na jego maksymalną prędkość (powiedzmy V). Z kolei położenie punktu możemy opisać przez jego położenie na okręgu, który będziemy oznaczać $\mathbb{S}^1$. W takim razie przestrzeń fazowa tego układu dynamicznego może być zapisana jako:

$$X = \mathbb{S}^1 \times [-V,V],$$

czyli jest powierzchnią boczną walca. Gdybyśmy nie potrzebowali założenia o zwartości przestrzeni, moglibyśmy za zbiór stanów przyjąć $X' = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wtedy pierwsza współrzędna reprezentowałaby dystans pokonany zgodnie z ruchem wskazówek zegara (czyli wahadło po pełnym obrocie nie wraca do tego samego punktu, ale jest dalej o obwód okręgu), zaś druga współrzędna mówiłaby o prędkości, tyle że tym razem nie musiałaby być już ona ograniczona.

Mimo że zwarta przestrzeń fazowa $X = \mathbb{S}^1 \times [-V,V]$ ma lepsze własności matematyczne, to do graficznego przedstawienia prostsza jest ta druga opcja. Rysunek 2 przedstawia pewną reprezentację (części) przestrzeni fazowej właśnie w tym drugim przypadku. Obrazek ma wygląd dość przyjemny dla oka – dzięki zastosowaniu kolorów, krzywych i strzałek oddaje dynamikę układu. Jak należy go poprawnie interpretować?

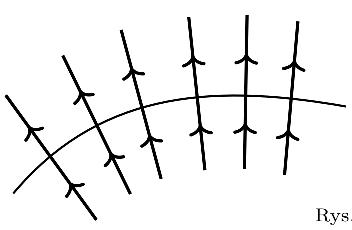


Rys. 2. Oś pozioma przedstawia położenie wahadła, a pionowa jego prędkość. Źródło: Wikipedia

Jeśli wybierzemy dowolny punkt na obrazku jako startowy, to możemy *popłynąć* wzdłuż strzałek i obserwować, jak zmieniają się położenie i prędkość wahadła. Dla przykładu – zamknięte czarne krzywe odpowiadają sytuacji, kiedy wahadło jest delikatnie wychylone z położenia równowagi i porusza się tam i z powrotem. W ten sposób zaczynając od jakiegoś wychylenia, zawsze będziemy do niego wracać. W ich środkach znajdują się pojedyncze punkty – to stany, kiedy wahadło znajduje się w najniższej pozycji i nie ma prędkości. W takiej sytuacji wraz z upływem czasu wahadło pozostaje stale w tym samym miejscu, a my nie możemy nigdzie popłynąć. Czerwone linie odpowiadają sytuacji, w której wahadło ma na tyle dużą prędkość, że cały czas obraca się w jedną stronę, wykonując pełne okręgi. Czytelnika zachęcamy do zastanowienia się, jakiej sytuacji odpowiadają niebieskie linie.

Jedno z podstawowych pytań, które matematyk może zadać, brzmi następująco: jak przestrzeń fazowa wygląda *lokalnie*? To znaczy ustalmy jakiś stan i jego małe otoczenie i zastanówmy się, jak nasza dynamika zachowuje się w tym otoczeniu. Jeden z przykładów możliwych zachowań już omówiliśmy – jeśli zaczynamy w punkcie odpowiadającym najniższemu położeniu wahadła bez żadnej prędkości, to zawsze w nim zostaniemy, tj. dla takiego stanu x zachodzi $\Phi(x,t)=x$ dla każdego czasu t. Takie stany będziemy nazywać *punktami stałymi* (fizycy nazywają je *punktami równowagi*). Na rysunku 2 możemy zobaczyć 7 punktów stałych. Trzy z nich odpowiadają stanowi, kiedy wahadło znajduje się w najniższym położeniu bez żadnej prędkości. Cztery z nich leżą z kolei na przecięciu krzywych niebieskich. Czytelnika zachęcamy do zastanowienia się nad tym, jakiemu stanowi odpowiadają te punkty.

Ponieważ dokładnie wiemy, jak wygląda ewolucja punktów stałych, są one dla matematyka z tego punktu widzenia nieciekawe. Rozważmy więc dostatecznie małe otoczenia punktów, które nie są stałe. Możemy łatwo zauważyć, że na rysunku 2 wszystkie one wyglądają z dokładnością do kierunku strzałek tak samo jak poniżej.



Rys. 3. Sąsiedztwo niestałego punktu

Czy to możliwe, żeby to była jakaś ogólna prawidłowość zachodząca dla każdej dynamiki? Czy każdą dynamikę można jakoś lokalnie „wyprostować”? Okazuje się, że odpowiedź jest twierdząca! Podamy teraz nieco techniczny dowód tego faktu.

Niech (X,Φ) będzie dowolną dynamiką i niech $x\in X$ będzie jakimś jej niestałym punktem. Na potrzeby tego artykułu domknięty podzbiór $S\subset X$ spełniający $x\in S$ będziemy nazywać *cięciem wokół x o czasie iniekcyjnym* $\eta>0$, jeśli obcięcie Φ do $S\times[-\eta,\eta]$ jest różnowartościowe (w związku z czym indukuje homeomorfizm $S\times[-\eta,\eta]\cong\Phi(S\times[-\eta,\eta])$) oraz $x\in\operatorname{Int}(\Phi_{[-\eta,\eta]}(S))$. Ten drugi warunek gwarantuje, że cięcie nie jest zdegenerowane – na przykład $S=\{x\}$ nie jest dozwolone, zaś ten pierwszy pokazuje, że dynamikę w otoczeniu x można jakoś „wyprostować” do prostokąta $S\times[-\eta,\eta]$, czyli mamy właśnie do czynienia z taką sytuacją jak na rysunku 3.

Amerykański matematyk Hassler Whitney (1907–1989) znany z wielu głębokich wyników, między innymi *twierdzenia Whitneya o zanurzeniu*, w 1933 roku udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Whitney)**.** *Niech (X,Φ) będzie dynamiką i niech $x\in X$ będzie niestałym punktem. Wtedy istnieje cięcie S wokół x.*

Szkic dowodu. Przypomnijmy, że zakładaliśmy, że X jest przestrzenią metryczną. Oznaczmy więc jej metrykę przez d. Załóżmy bez straty ogólności, że $\Phi(x,1)\neq x$. Dla $y\in X$ definiujemy:

$$\theta(y)=\int\limits_0^1 d(\Phi(y,s),x)ds.$$

Rozważmy dla ustalonego $y\in X$ funkcję $t\mapsto\theta(\Phi(y,t))$ i oznaczmy wartość jej pochodnej w $t=0$ przez $\theta'(y)$. Prosty rachunek wykorzystujący własności funkcji Φ pokazuje, że:

$$\theta'(y)=d(\Phi(y,1),x)-d(y,x),$$

więc w szczególności θ' jest ciągła. Jako że $\Phi(x,1)\neq x$, to $\theta'(x)=d(\Phi(x,1),x)>0$. Korzystając z ciągłości Φ,θ' i dodatniości θ', znajdujemy $\ell>0$ takie, że $\theta(\Phi(x,-\ell))<\theta(x)<\theta(\Phi(x,\ell))$ i $\theta'(\Phi(x,t))>0$ dla każdego $-2\ell\leqslant t\leqslant 2\ell$. Korzystając z ciągłości Φ,θ i θ', możemy znaleźć takie otwarte otoczenie U punktu x, że dla każdego $y\in\overline{U}$ spełnione są następujące warunki:

- $\theta'(\Phi(y,t))>0$ dla każdego $-2\ell\leqslant t\leqslant 2\ell$ oraz
- $\theta(\Phi(y,-\ell))<\theta(x)<\theta(\Phi(y,\ell))$.

W takim razie dla każdego $y\in\overline{U}$ mamy dokładnie jedno $-\ell<t_y<\ell$ spełniające $\theta(\Phi(y,t_y))=\theta(x)$. Udowodnimy teraz, że zbiór $S=\{\Phi(y,t_y): y\in\overline{U}\}$ jest cięciem wokół x. Rzeczywiście, $\ell>0$ jest czasem iniekcyjnym dla S. Co więcej, jako że $-\ell<t_y<\ell$, to $U\subset\Phi_{[-\ell,\ell]}(S)$. Pozostaje więc tylko wykazać, że S jest domknięte. W tym celu załóżmy, że mamy ciąg punktów $\Phi(y_i,t_{y_i})$ zbieżny do jakiegoś $w\in X$. Przechodząc do podciągu, możemy założyć bez straty ogólności, że y_i zbiega do jakiegoś $z\in\overline{U}$, zaś t_{y_i} zbiega do jakiegoś $s\in[-\ell,\ell]$. Z ciągłości Φ oraz θ wynika $\theta(\Phi(z,s))=\theta(z)$, a to w połączeniu z jedynością t_z daje $t_z=s$. Wnioskujemy więc, że $w=\Phi(z,t_z)$, czyli S jest domknięte. To kończy dowód. □

Twierdzenie Whitneya potwierdza zatem to, co widzimy na rysunku 3 – każdą dynamikę można lokalnie „wyprostować” (w odpowiednim oddaleniu od punktu stałego), nawet jeśli globalne zachowanie układu jest bardzo skomplikowane.