„Experyment” z nieskończonością

*Mirosław LACHOWICZ**

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Międzynarodowe Spotkania Artystyczne „Experyment”

W Zbąszyniu, nad jeziorem Błędno, w zachodniej Wielkopolsce corocznie odbywa się „Experyment” (kochana Redakcjo: proszę nie zmieniać pisowni, tak właśnie się nazywa: jak Experyment to eksperyment [Zgoda. – przyp. red.]). Jest to międzynarodowe spotkanie artystów posługujących się różnymi środkami wyrazu. Teatr, muzyka, taniec, malarstwo, fotografia, a przede wszystkim działania artystyczne, które trudno ująć w jednym określeniu. Jest to wydarzenie unikalne na dużą (światową, moim zdaniem) skalę. Jest to święto otwarcia, poszukiwania i znajdowania wspólnego języka – również dosłownie. To prawdziwy fenomen, jakiego nie spotkałem w innych miejscach. Experyment dzieje się od 2001 roku, trzymany silną ręką organizatorów – małżeństwa Katarzyny Kutzmann-Solarek i Ireneusza Solarka. Oby dział się dalej!

Logo „Experymentu” 2022. Zdjęcie wykonane przez Dorotę Bulińską

W roku 2022 Experyment pod tytułem „Bezkres – infinity” odbywał się po raz pierwszy w samym środku upalnego lata (bywał na początku całkiem letniego lata), w dniach 23–29 lipca. Organizator, Ireneusz Solarek, uznał, że skoro i tak się tam kręcę, to mógłbym coś powiedzieć. Rzeczywiście mogłem. Wprawdzie tytuł przerastał moje (zapewne nie tylko moje) możliwości, ale jak Experyment, to eksperyment (to już zresztą napisałem). Najpierw się więc zgodziłem, a później przestraszyłem, co chyba było właściwą kolejnością.

Co ma zrobić matematyk w takiej eksperymentalnej sytuacji? Powiedzieć, że w zasadzie matematycy wcale nie potrzebują nieskończoności, choć chętnie o niej mówią? Że z nieskończonością jest jak z czasem? Jak nas nie pytają, to wiemy, a jak pytającemu chcemy wytłumaczyć, to nie wiemy. Zupełnie jak święty Augustyn.

Sytuacja wyglądała na dość beznadziejną, gdyż należało się spodziewać statystycznego podejścia do matematyki u potencjalnych odbiorców. Czyli „matematyka jest królową nauk”, ale lepiej się od niej trzymać z daleka. Nawiasem mówiąc: ciekawe, czy ktoś potrafiłby uzasadnić, o co chodzi z tą królową, gdyż patrząc na naukę, raczej tego nie widać. Nawet gdyby królową rozumieć we współczesnym sensie brytyjskim.

Oto jednak w środku upalnego lipcowego dnia w sali nieczynnego zbąszyńskiego muzeum zebrała się tak liczna grupa osób, że więcej by już tam nie weszło (a wydawałoby się, że zawsze może wejść jeszcze jedna, jak w znanym dowcipie o indukcji). Nieskończoność przyciągnęła?

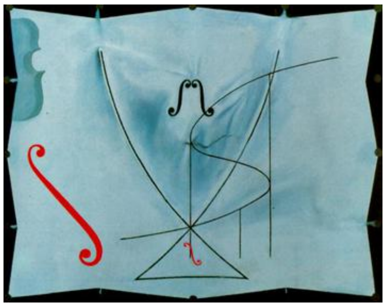
W *Delcie* ukazało się wiele artykułów o nieskończoności. Wymieniam niektóre, zachęcając do poszukiwań.
A. Białynicki-Birula, *Po co matematykowi nieskończoność?*, Δ^{5}_{07}
W. Guzicki, *Kombinatoryka i nieskończoność*, Δ^{7}_{13}
J. Jaszuńska, *Równe i różne nieskończoności*, Δ^{7}_{13}
M. Kordos, *Tako rzecze Arystoteles*, Δ^{7}_{13}
M. Lachowicz, *Nieskończoność nieskończenie użyteczna*, Δ^{7}_{13}
M. Szurek, *Czy nieskończoność jest?*, Δ^{7}_{13}
J. Tyszkiewicz, *Po co mi nieskończoność?*, Δ^{7}_{13}
M. Korch, *Nieskończoność*, Δ^{1}_{19}
M. Korch, *Hotel Hilberta*, Δ^{1}_{19}
M. Korch, *Nieskończoność nieskończoności*, Δ^{1}_{20}.

Zacząłem od akcji „przekażmy sobie wstęgę Möbiusa” na znak poszukiwania prawdy. Ze wstęgą Möbiusa można robić cudeńka, na przykład przecinając ją wzdłuż, a potem jeszcze raz... Nawiasem mówiąc, tego typu obiekt był znany przed Augustem Ferdinandem Möbiusem (1790–1868) – można go znaleźć na mozaikach rzymskich z III wieku. Wspomniałem o grafikach Mauritsa C. Eschera (1898–1972), inspirowanych wstęgą Möbiusa, z mrówkami (czerwonymi) chodzącymi po wstędze. Szwajcarski rzeźbiarz Max Bill (1908–1994) tworzył rzeźby o kształcie przypominającym wstęgę Möbiusa, nazywając ją „wstęgą bez końca”. Odniesienia do niej w sztuce są tak liczne, że ich wymienienie wymagałoby długiego opisu. Stylizowana wstęga jest symbolem recyklingu, a zatem czegoś „nieskończonego” (powiedzmy, potencjalnie).
A skoro już przy recyklingu jesteśmy, warto wspomnieć, że nieskończone byłyby wszystkie procesy okresowe. „Byłyby”, gdyby istniały – okresowość przez nas obserwowana jest jednak tylko efektem we (względnie) małej skali czasowej; nie jest ona okresowością matematyczną.

Tak jak okrąg jest idealizacją czegoś okrągłego, tak nieskończoność jest idealizacją czegoś bardzo dużego. Nie mamy wprawdzie na co dzień bezpośrednio do czynienia z wielkimi liczbami, ale one otaczają nas zewsząd. Oto kilka ogromnych liczb „z życia”, które łatwo napisać, jednak tak naprawdę trudno jest sobie wyobrazić. Szacuje się, że w naszej galaktyce znajdują się setki miliardów

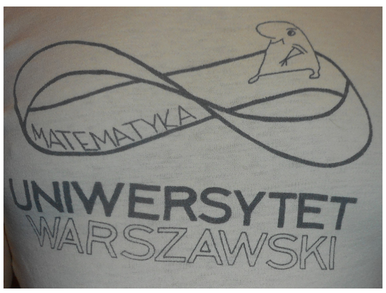
Silną inspiracją była dla mnie książka P. Odifreddiego *Ritratti dell'infinito* (Rizzoli, 2020) oraz liczne jego prezentacje na YouTube.

gwiazd, zaś samych galaktyk w widzialnym (obserwowalnym) Wszechświecie są biliony (podobno około dwóch). Liczba neuronów w mózgu człowieka to (prawie) sto miliardów. Archimedes z Syrakuz (287–212 p.n.e) oszacował liczbę ziarenek piasku, które wypełniłyby cały Wszechświat (taki, jak go sobie wyobrażał Archimedes) na 10^{63}. Było to ćwiczenie na wynaleziony przez niego wzór na objętość kuli, a cała trudność dotyczyła zapisu tej dużej liczby w systemie używanym przez Greków. Współcześnie liczbę atomów we Wszechświecie szacuje się (bardzo zgrubnie) na 10^{80}.



S. Dalí, „Ogon jaskółki" (1983). Źródło: Wikipedia

W życiu codziennym często 1000 to już dużo. Zapewne odwołując się do tej intuicji, John Wallis w 1655 roku przyjął na oznaczenie nieskończoności znany dzisiaj symbol ∞. Jak się wydaje, były to dwie stylizowane litery D lub jedna litera M oznaczające w systemie rzymskim 1000. Niektórzy jednakże utrzymują, że mogła to być stylizowana literka ω – ostatnia litera alfabetu greckiego.



Grafika na koszulce Wydziału MIM UW z lat 80. ubiegłego wieku

Odniesienie do nieskończoności można znaleźć w malarstwie – na przykład w dziełach wspomnianego już Eschera oraz Salvadora Dalego (1904–1989). Escher tworzył parkietaże z elementami zmniejszającymi w kierunku brzegu. Oczywiście nieskończoności nie mógł stworzyć, ale udało mu się ją zasugerować. Zbliżając się do brzegu, elementy stają się coraz mniejsze, a zatem „dojście" do brzegu jest niemożliwe. Jest to odniesienie do geometrii hiperbolicznej (o której można wiele przeczytać w Δ^{8}_{18}). Podobny efekt uzyskał w grafikach, np. w „Cyklu granicznym III" z roku 1959. Dalí w sposób istotny inspirował się matematyką. Dzieło „Twarz wojny" (jakże aktualne obecnie) z roku 1940 sugeruje nieskończone kopie przerażającej twarzy jako okropieństwa wojny. Ostatnie dzieło Dalego, „Ogon jaskółki", było bezpośrednio zainspirowane matematyką. Na obrazie umieszczone są symbole całek i linie odnoszące się do teorii katastrof René Thoma. Dalí określił teorię Thoma jako „najpiękniejszą teorię estetyczną na świecie". W kilku swoich dziełach Dalí wykorzystywał geometrię czterowymiarową. Najsłynniejszym przykładem jest „Corpus hypercubus" (zwany też „Ukrzyżowaniem") z 1954 roku.

Zgodnie z koncepcją Arystotelesa (384–322 p.n.e.) można mówić o nieskończoności potencjalnej lub aktualnej. Pierwsza odnosi się do obiektów skończonych, ale nieograniczonych (jak liczby naturalne). W matematyce sprowadza się do rozpatrywania pojęcia granicy. Nieskończoność aktualna (dokonana) istnieje bezpośrednio. Dzisiaj może to się wydać dziwne, ale wielu matematyków nie akceptowało takiej nieskończoności. Gottfried W. Leibniz (1646–1716) powiedział, że nie ma niczego bardziej namacalnego niż absurdalność idei liczby właściwie nieskończonej. Podobnie Carl F. Gauss (1777–1855) napisał: „Protestuję przeciw użyciu nieskończonych wielkości, jako czegoś kompletnego. To nigdy nie jest dopuszczalne w matematyce".

Dopiero Georg Cantor (1845–1918) wprowadził nas do Raju, przynajmniej zdaniem Dawida Hilberta (1862–1943): „Nikt nas nie wypędzi z Raju, który stworzył Cantor". Badania pojęcia nieskończoności doprowadziły Cantora do konkluzji, że nie ma jednej jedynej (jak matki), ale nieskończenie wiele nieskończoności. Odsyłam tutaj do wymienionych na marginesie poprzedniej strony artykułów Michała Korcha, które precyzują, co należy przez to rozumieć. Odnosząc się do sprawy popularnie, można powiedzieć, że Cantor był w stanie dla „każdej nieskończoności" określić „nieskończoność od niej większą". W ten sposób tworzył się układ nieskończoności i pewność, że nie może istnieć największa. Witkacy (S.I. Witkiewicz, 1885–1939) w dramacie „Tumor Mózgowicz" ujął to tak:

Nad zrębem planety,
Pośród gwiezdnej nocy,
Szereg alefów w nieskończoność pełznie.
I nieskończoność, unieskończoniona
Zamiera w sobie, przez siebie zdradzona.

Dla Cantora, formalnie protestanta (luteranina), był to również problem natury teologicznej. Jego kontakty z odpowiednią kongregacją w Watykanie i jej prefektem kardynałem Johannesem B.G. Franzelinem (1816–1886) to zapewne temat na bardzo ciekawą książkę (lub film), i dziwne jest, że jeszcze taka się nie pojawiła (albo ja o tym nie wiem). Sam fakt, że luteranin zwraca się do kongregacji katolickiej, jest interesujący. Ostateczne ustalenia były pozytywne dla Cantora: uznano, że nie ma problemów teologicznych z jego odkryciem. Prawdziwą nieskończonością jest ta, która odpowiada Bogu, a te Cantora to tylko obiekty pozaskończone (*transfinite*). Wikipedia (w wydaniu angielskim) ujmuje to tak: *W matematyce liczby pozaskończone to liczby, które są „nieskończone" w tym sensie, że są większe niż wszystkie liczby skończone, ale niekoniecznie absolutnie nieskończone. Należą do nich liczby kardynalne pozaskończone, które są liczbami kardynalnymi używanymi do ilościowego określania wielkości zbiorów nieskończonych, oraz liczby porządkowe pozaskończone, które są liczbami porządkowymi używanymi do* *uporządkowania zbiorów nieskończonych.* Dalej to samo źródło: *Niewielu współczesnych pisarzy podziela te skrupuły; obecnie przyjęto zwyczaj określania liczb kardynalnych i porządkowych pozaskończonych jako liczb nieskończonych. Niemniej jednak termin „transfinite” również pozostaje w użyciu.*

Dzisiaj teoria Cantora należy do kanonu wiedzy matematycznej, ale środowisko przyjmowało z trudem i oporem jego idee. Można wprost powiedzieć: nie było Cantorowi łatwo! Przeczy to popularnej tezie, że w matematyce albo coś jest prawdziwe, albo nie, i nie ma innych kryteriów. Są, są!

Na koniec warto wspomnieć o liczbach nadrzeczywistych (*surreal numbers*) wprowadzonych przez Johna H. Conwaya (1937–2020), będących uogólnieniem liczb kardynalnych, na których można przeprowadzać działania arytmetyczne. Dobrym wprowadzeniem do tej tematyki jest książka Donalda E. Knutha (wybitny informatyk, szerzej znany m.in. jako twórca systemu składu komputerowego TEX, w którym składana jest również *Delta*).

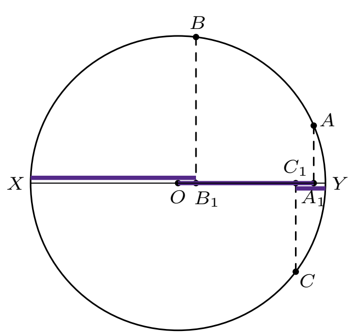
D.E. Knuth, *Liczby nadrzeczywiste. Jak dwoje byłych studentów nakręciło się na czystą matematykę i odnalazło pełnię szczęścia*, Copernicus Center Press, 2022.

Odkrywanie i badanie nieskończoności pozostanie najwyższym szczytem usiłowań intelektualnych człowieka. Narzuca się analogia matematyki i himalaizmu. Jedno i drugie warto robić, by przekonać się, jak wysoko człowiek może się wznieść. Za jedno i za drugie można zapłacić wysoką cenę, ale nie powinno być miejsca na rezygnację.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1753. W okręgu Ω o środku w punkcie O narysowano cięciwy AB i AC, których długość jest równa promieniowi Ω. Oznaczmy przez A_1, B_1 i C_1 rzuty prostokątne kolejno punktów A, B i C na dowolną średnicę XY okręgu Ω. Udowodnić, że długość jednego z odcinków XB_1, OA_1 i C_1Y jest sumą długości dwóch pozostałych.



Rozwiązanie na str. 8

M 1754. Dane są liczby rzeczywiste nieujemne x, y, z takie, że
$$\frac{2}{1+x^3}+\frac{2}{1+y^3}+\frac{2}{1+z^3}=3.$$
Udowodnić, że
$$\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1-y}{1-y+y^2}+\frac{1-z}{1-z+z^2}\geqslant 0.$$
Rozwiązanie na str. 19

M 1755. Udowodnić, że dowolną dodatnią liczbę wymierną można przedstawić jako iloraz iloczynów silni liczb pierwszych (niekoniecznie różnych), przykładowo:
$$\frac{10}{9}=\frac{2!\cdot 5!}{3!\cdot 3!\cdot 3!}.$$
Rozwiązanie na str. 17

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1077. Po sformułowaniu przez Newtona prawa powszechnego ciążenia nieznana pozostawała wartość występującej w nim stałej grawitacji G. Znany był jednak promień Ziemi, $R \approx 6400$ km, i typowe gęstości skał występujących na jej powierzchni, $\rho \approx 2{,}7$ g/cm^3 (np. granit $\rho = 2{,}7$ g/cm^3, kwarc $\rho = 2{,}65$ g/cm^3, wapień $\rho = 2{,}8$ g/cm^3), oraz wartość przyspieszenia spadku swobodnego, $g \approx 10$ m/s^2.
(a) Na podstawie tych danych „pomóż Newtonowi” i oszacuj wartość stałej grawitacji G, przyjmując stałą gęstość rozkładu masy Ziemi.

(b) Po zmierzeniu przez Cavendisha wartości stałej G (uzyskał wartość bardzo bliską przyjmowanej obecnie, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2) można było wyznaczyć masę Ziemi, $M \approx 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, i jej średnią gęstość $\rho \approx 5{,}5$ g/cm^3. Oszacuj, ile wynosi ρ_c – gęstość materii w środku Ziemi. Przyjmij liniowy wzrost gęstości z głębokością.
Uwaga: Dane w treści zadania odpowiadają wartościom przyjmowanym współcześnie.
Rozwiązanie na str. 18

F 1078. W badaniach promieniotwórczości używa się liczników cząstek. Po zarejestrowaniu impulsu (cząstki) licznik powraca do stanu „gotowości” do rejestracji następnego impulsu w czasie τ, zwanym *czasem martwym licznika.* Rozpady promieniotwórcze mają charakter przypadkowy, ale można założyć, że ich średnia liczba na jednostkę czasu jest stała – zakładamy przy tym, że czas pomiaru t jest długi w porównaniu z czasem martwym τ, ale krótki w porównaniu z czasem połowicznego rozpadu badanej próbki.
(a) W czasie t zarejestrowano M cząstek. Oszacuj liczbę cząstek, które rzeczywiście dotarły do licznika. Przyjmij, że $t \gg M\tau$.
(b) Jak wyznaczyć czas martwy licznika, dysponując dwoma różnymi źródłami promieniowania?
Rozwiązanie na str. 19