



Łańcuchy Markowa – część 2

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Tym razem spojrzymy na łańcuchy Markowa pod nieco innym kątem – będziemy analizować ich średni czas dojścia do określonego stanu, mierzony liczbą kroków. Jako przykład rozwiążemy następujące zadanie, które pojawiło się na Obozie Naukowym Olimpiady Matematycznej w Zwardoniu w 2001 roku.

*Pewnego wieczora Fredrek opowiada dowcipy, przy czym wybiera je losowo (z jednakowym prawdopodobieństwem) z 3-elementowego zbioru znanych sobie dowcipów. Paula śmieje tylko jeden dowcip Fredka i śmieje się zawsze, kiedy Fredek go opowiada. Andrzej śmieje się z każdego dowcipu, którego nie pamięta, a pamięta zawsze dwa poprzednie. Maniek zaś śmieje się wtedy, gdy Fredek opowiada ten sam dowcip, co przed chwilą. Kiedy **po raz drugi z rzędu** nikt nie śmieje się z opowiadanego dowcipu, Fredek obrażony idzie spać. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby dowcipów, które Fredek opowie tego wieczora.*

Rozwiązanie. Niech A, B, C będą dowcipami Fredka, przy czym dowcipem bawiącym Paula jest C . Fredek zakończy opowiadanie dowcipów po wystąpieniu ciągu $ABAB$ lub $BABA$. Możemy rozważyć następujące stany, zależnie od tego, jak kończy się ciąg opowiadanych dowcipów.



- S_C – stan początkowy lub ciąg zakończony na C ,
- S_A – ciąg zakończony na A , ale nie na BA ,
- S_B – ciąg zakończony na B , ale nie na AB ,
- S_{AB} – ciąg zakończony na AB , ale nie na BAB ,
- S_{BA} – ciąg zakończony na BA , ale nie na ABA ,
- S_{ABA} – ciąg zakończony na ABA , ale nie na $BABA$,
- S_{BAB} – ciąg zakończony na BAB , ale nie na $ABAB$,
- S_{koniec} – ciąg zakończony na $ABAB$ lub $BABA$.

Niech E_i oznacza wartość oczekiwaną liczbę opowiedzianych dowcipów *pod warunkiem* rozpoczęcia od stanu S_i . Oczywiście $E_{koniec} = 0$, a poszukujemy E_C . Dla przykładu, w stanie S_{AB} mamy możliwe trzy przejścia: dowcip A przeniesie nas do stanu S_{ABA} , dowcip B do stanu S_B , a dowcip C do stanu S_C . Wynika z tego, że $E_{AB} = 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_B + \frac{1}{3}E_{ABA}$. Analogicznie dla pozostałych sześciu stanów:

$$\begin{aligned} E_C &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_A + \frac{1}{3}E_B, & E_A &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_A + \frac{1}{3}E_{AB}, \\ E_B &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_B + \frac{1}{3}E_{BA}, & E_{BA} &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_A + \frac{1}{3}E_{BAB}, \\ E_{ABA} &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_A, & E_{BAB} &= 1 + \frac{1}{3}E_C + \frac{1}{3}E_B. \end{aligned}$$

Możemy ułatwić sobie obliczenia, gdyż ze względu na symetrię zachodzą równości $E_A = E_B$, $E_{AB} = E_{BA}$, $E_{ABA} = E_{BAB}$. Bezpośredni rachunek prowadzi do $E_C = 60$, więc zanosi się na długi, męczący wieczór.

Zadania

- Robaczek wdrapuje się na drzewo do swojej dziupli, która znajduje się na wysokości 40 cm. W każdej minucie z prawdopodobieństwem p wchodzi 10 cm wyżej lub (z prawdopodobieństwem $1 - p$) ześlizguje się 10 cm w dół (z wyjątkiem sytuacji, w której jest u podnóża drzewa – stamtąd zawsze idzie w górę). W zależności od p wyznaczyć wartość oczekiwaną czasu potrzebnego robaczekowi na dotarcie do dziupli z podnóża drzewa.
- W urnie A znajduje się 8 kul białych, a w urnie B 8 kul czarnych. Losujemy po jednej kuli z każdej urny, następnie kulę z urny A wkładamy do urny B , a kulę z urny B do urny A . Jaka jest wartość oczekiwana liczby losowań, po której liczby kul białych i czarnych w obu urnach będą równe?
- Rzucamy sześcienną kostką do gry i badamy iloczyn wszystkich liczb wyrzuczonych oczek (powtarzające się mnożymy tyle razy, ile się powtarzają). Kończymy zabawę, gdy iloczyn będzie miał dwie ostatnie cyfry równe 0. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczbę rzutów.
- Na centralnym polu szachownicy 3×5 stoi skoczek i porusza się zgodnie z szachowymi regułami, za każdym razem losując ruch ze wszystkich dostępnych (z jednakowym prawdopodobieństwem). Skoczek kończy zabawę, gdy wróci na centralne pole. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczbę ruchów skoczka.

Wskazówki do zadań

1. Mamy tu pięć stanów: S_0 oznacza wysokość robaczka równą 10 cm, dla $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

2. Stan S_i może oznaczać liczbę i kul czarnych w urnie A – wtedy stan S_0 jest początkowy, a stan S_4 – pochłaniający.

3. Niech x_n będzie iloczynem wszystkich wyrzuczonych liczb oczek po n rzutach. Wstawimy analizować liczbę $NMD(x_n, 100)$, więc mamy możliwe następujące stany: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

4. Ze względu na symetrię jest tu tylko 6 niewiadomych.