

# Strategia w grze w kamyki

Dagna CZUBLA\*, Marcin WIERZBIŃSKI\*\*

\* Uczennica, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie  
\*\* Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



## Rozwiązanie zadania F 1083.

Przed ociepleniem przez jednorodną, płaską warstwę ciała stałego (ściany) o powierzchni  $A$ , której powierzchnie zewnętrzne utrzymywane są w różnych (ale stałych w czasie) temperaturach  $T_1 < T_2$ , przepływa ciepło o mocy:

$$\frac{dQ}{dt} = P_1 = \frac{\kappa_1}{d_1} (T_2 - T_1)A.$$

Po ociepleniu ściana składa się z dwóch jednorodnych warstw: styropianu o grubości  $d_2$  i cegły o grubości  $d_1$ . Na granicy pomiędzy styropianem i cegłą ustali się temperatura  $T_3$ ,  $T_1 < T_3 < T_2$ . Przez każdą z warstw (styropianu i cegły) przepływa taka sama ilość ciepła, ale teraz o mocy  $P_2 \neq P_1$ . Z warunku równości mocy przepływających przez każdą z warstw ściany otrzymujemy:

$$P_2 = \frac{\kappa_1}{d_1} (T_2 - T_3)A = \frac{\kappa_2}{d_2} (T_3 - T_1)A,$$

który pozwala wyznaczyć wartość

$$T_3 = \frac{\kappa_1 T_2 / d_1 + \kappa_2 T_1 / d_2}{\kappa_1 / d_1 + \kappa_2 / d_2},$$

a następnie

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{\kappa_1 \kappa_2 (T_2 - T_1) / (d_1 d_2)}{\kappa_1 / d_1 + \kappa_2 / d_2} = \\ &= \frac{\kappa_2 / d_2}{\kappa_1 / d_1 + \kappa_2 / d_2} P_1. \end{aligned}$$

Dla podanych danych  $P_2 \approx 0,45P_1$ , czyli strata ciepła jest ponad 2,2 raza mniejsza niż przed ociepleniem. Jeśli przyjąć, że ściana ma dosyć typowe wymiary: 2,7 m na 4 m, a różnica temperatur  $T_2 - T_1 = 20$  K, to  $P_1 \approx 864$  W, a  $P_2 \approx 391$  W.

Tabela dla początkowych liczb kamyków z określeniem, czy Ada ma strategię pozwalającą jej wygrać z Bajtkiem.

$n$	Strategia wygrywająca dla Ady?
1	TAK
2	NIE
3	TAK
4	TAK
5	TAK
6	TAK
7	NIE
8	TAK

Niektóre problemy informatyczne można rozwiązać prostymi algorytmami, których poprawność (tzn. udzielanie odpowiedzi zgodnie z oczekiwaniami) jest oczywista. Istnieją też problemy, do których rozwiązania potrzebne są bardzo skomplikowane algorytmy, a znane dowody ich poprawności są wyjątkowo złożone i zagmatwane. W tym artykule będziemy się zajmować problemem, który może być rozwiązany przez bardzo prosty algorytm, ale udowodnienie jego poprawności wymaga już pewnego wysiłku.

Na tegorocznej próbnej maturze z informatyki pojawiło się ciekawe zadanie o nazwie *Gra w kamyki*. Należało podać efektywny algorytm obliczający, który gracz ma strategię wygrywającą. Okazuje się, że zadanie to można rozwiązać bardzo prostym algorytmem, ale formalny dowód jego poprawności wymaga więcej wysiłku. W czasie egzaminu samo podanie algorytmu wystarczało do uzyskania maksymalnej liczby punktów, a dowód poprawności nie był wymagany. W tym artykule przedstawimy wzorcowy algorytm oraz uzasadnimy jego poprawność.

## Gra w kamyki

Ada i Bajtek postanowili zagrać w następującą grę. Na stole przed sobą rozłożyli  $n$  kamyków. Zasady gry są proste. Gracze wykonują ruchy na przemian, rozpoczyna Ada. W swoim ruchu gracz może zabrać ze stołu 1, 3 lub 4 kamyki. Gracz, który weźmie ostatni kamyk, wygrywa.

Przykładowy przebieg rozgrywki dla  $n = 5$  kamyków:

Ada bierze jeden kamyk ze stołu, następnie Bajtek bierze cztery kamyki i wygrywa grę. Ada może też zacząć od zabrania trzech kamyków, następnie Bajtek może jedynie zabrać jeden kamyk (ponieważ na stole zostały dwa), a na końcu Ada zabiera ostatni kamyk i wygrywa grę.

Ada zastanawia się, dla jakich  $n$  ma strategię wygrywającą. To znaczy chciałaby wiedzieć, czy niezależnie od ruchów Bajtka będzie w stanie z nim wygrać, jeśli będzie mądrze wybierać swoje posunięcia. Okazuje się, że ten problem rozwiązuje bardzo prosty algorytm podany poniżej.

### Algorytm 1. Sprawdzenie strategii wygrywającej dla Ady

```
1: procedure CZYADAMASTRATEGIĘWYGRYWAJĄCĄ( $n$ )
2:   if  $n \bmod 7 = 0$  or  $n \bmod 7 = 2$  then
3:     return „NIE”
4:   else
5:     return „TAK”
```

Algorytm 1 sprawdza, czy reszta z dzielenia liczby  $n$  przez 7 jest równa 0 lub 2. Jeśli tak, to zwraca „NIE” (czyli Ada nie ma strategii wygrywającej). W przeciwnym przypadku zwraca „TAK” (czyli Ada ma strategię wygrywającą). Uzasadnimy teraz formalnie poprawność tego algorytmu.

Zastanówmy się, co dzieje się dla małych wartości  $n$ . Jeżeli  $n$  jest równe 1, 3 lub 4, to Ada może wziąć wszystkie kamyki ze stołu i wygrać – ma strategię wygrywającą. Jeśli  $n = 2$ , Ada musi wziąć 1 kamyk, zostawiając na stole 1 kamyk, który Bajtek musi wziąć, tym samym wygrywając; Ada nie ma w tym przypadku strategii wygrywającej. Jeśli  $n = 5$  lub  $n = 6$ , to Ada może wziąć odpowiednio 3 lub 4 kamyki, zostawiając Bajtkowi 2 kamyki, Bajtek więc musi przegrać – Ada ma strategię wygrywającą w obu przypadkach. Jeżeli  $n = 7$ , Ada po swoim ruchu zostawi Bajtkowi 3, 4 lub 6 kamyków na stole, Bajtek ma więc strategię wygrywającą. Stąd wynika, że dla  $n = 7$  Ada nie ma strategii wygrywającej.



### Rozwiązanie zadania M 1762.

Odpowiedź: tak.

Niech pola lewe dolne i prawe górne leżą na głównej przekątnej szachownicy i mają „współrzędne”  $(1, 1)$  i  $(100, 100)$ .

Korzystając z zasady indukcji, udowodnimy, że można dostać się do dowolnego wolnego pola na tej przekątnej.

Rzeczywiście, założmy, że możemy przejść do pola  $(n, n)$ . Jeżeli pole  $(n + 1, n + 1)$  jest wolne, to co najmniej jedno z pól  $(n, n + 1)$  i  $(n + 1, n)$  nie jest zajęte i można przez nie przejść do pola  $(n + 1, n + 1)$ .

Jeżeli natomiast pole  $(n + 1, n + 1)$  jest zajęte, to dokładnie jeden z jego sąsiadów jest zajęty, więc jedna z dwóch ścieżek od  $(n, n)$  do  $(n + 2, n + 2)$  jest możliwa do przejścia.

Pytanie: czy dla wymiaru planszy  $100 \times 101$  teza również zachodzi?

Ogólnie, jeśli Ada ma strategię wygrywającą dla  $n - 1, n - 3$  oraz  $n - 4$  kamyków na początku, to nie ma strategii wygrywającej dla  $n$  kamyków, gdyż każdy jej ruch doprowadzi do sytuacji, w której Bajtek ma strategię wygrywającą.

Formalny dowód poprawności algorytmu będzie wykorzystywał zasadę indukcji matematycznej, o której można przeczytać na przykład w Kąćniku Początkującego Olimpijczyka w  $\Delta_{19}^7$ . Mianowicie: wiemy już, że dla  $n \leq 7$  Ada nie ma strategii wygrywającej, jeśli  $n$  daje resztę 0 lub 2 z dzielenia przez 7, zaś w przeciwnym przypadku ma taką strategię. Pokażemy teraz, że jeśli ta własność zachodzi dla wszystkich  $n \leq 7k$  dla pewnej liczby naturalnej  $k$ , to zachodzi również dla wszystkich  $n$  ze zbioru  $\{7k + 1, 7k + 2, \dots, 7k + 7\}$ .

Dla  $n = 7k + 1, n = 7k + 3$  oraz  $7k + 4$  Ada może wziąć ze stołu odpowiednio 1, 3 lub 4 kamyki. W konsekwencji na stole zostanie  $7k$  kamyków i, jak wynika z naszego założenia, oznacza to przegraną Bajtka.

Jeśli  $n = 7k + 2$ , to po ruchu Ady na stole będzie  $7k + 1, 7(k - 1) + 6$  albo  $7(k - 1) + 5$  kamyków. Wiemy jednak z naszego założenia, że dla każdej z tych liczb Ada ma strategię wygrywającą, czyli nie ma strategii wygrywającej dla  $n = 7k + 2$ .

Teraz jeśli  $n = 7k + 5$  lub  $n = 7k + 6$ , to Ada może wziąć odpowiednio 3 lub 4 kamyki, po czym na stole zostaną  $7k + 2$  kamyki, więc, jak pokazaliśmy przed chwilą, Bajtek będzie na straconej pozycji.

W końcu jeśli na początku mamy  $n = 7k + 7$ , to po ruchu Ady na stole będzie  $7k + 3, 7k + 4$  albo  $7k + 6$  kamyków. Udowodniliśmy już, że w każdej z tych sytuacji Ada ma strategię wygrywającą, więc dla wyjściowego  $n$  Ada nie ma strategii wygrywającej. Zasada indukcji matematycznej kończy dowód poprawności algorytmu.

### Co dalej?

Czy to, że gracze mogli zabrać 1, 3 lub 4 kamyki, miało kluczowe znaczenie dla istnienia algorytmu o prostej strukturze stwierdzającego, kto ma strategię wygrywającą? Jak zmieniłaby się odpowiedź, gdyby gracze mogli zabierać na przykład 1, 4, 5 lub 10 kamyków? Aby odpowiedzieć na te pytania, rozważmy ogólniejszy przypadek – każdy z dwojga graczy w swoim ruchu może zabrać ze stołu  $k_1, k_2, \dots, k_{l-1}$  lub  $k_l$  kamyków (przy czym liczby te są parami różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi ustawionymi w kolejności malejącej). Tak jak wcześniej, przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu.

Rozważmy ciąg  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , zdefiniowany następująco:  $a_n$  jest równe 1, jeśli Ada ma strategię wygrywającą przy  $n$  kamykach znajdujących się początkowo na stole oraz 0 w przeciwnym przypadku. Zauważmy, że dowolnych  $k_1$  kolejnych wyrazów ciągu  $(a_i)$  determinuje wszystkie przyszłe jego wyrazy. Istotnie, jeśli wiemy, czy Ada ma strategię wygrywającą dla  $n - k_1, n - k_2, \dots, n - k_l$ , to możemy stwierdzić, czy ma również strategię wygrywającą dla  $n$ .

Skoro różnych możliwych ciągów binarnych o długości  $k_1$  jest  $2^{k_1}$ , to od pewnej pozycji  $p \leq 2^{k_1}$  wyrazy ciągu  $a_n$  zaczną się cyklicznie powtarzać, z pewnym okresem  $q \leq 2^{k_1}$ .

Stąd wynika, że nasz problem da się rozwiązać algorytmem o bardzo prostej strukturze, który unika jakichkolwiek pętli, a wykonuje maksymalnie jedno

dzielenie modulo i pewną liczbę porównań. Taki algorytm powinien działać następująco:

- jeśli  $n \leq p$ , to algorytm ma zakodowaną odpowiedź dla  $n$ ;
- jeśli  $n > p$ , to algorytm sprawdza resztę z dzielenia  $n$  przez  $q$  i na tej podstawie stwierdza, czy Ada ma strategię wygrywającą.

Zauważmy, że nie pokazaliśmy w związku z tym, jak konkretnie napisać algorytm dla ustalonych wartości  $k_1, k_2, \dots, k_l$  – wykazaliśmy tylko, że algorytm o prostej strukturze istnieje.

Czytelnik znający pojęcie deterministycznego automatu skończonego i języka regularnego (można o nich przeczytać w artykułach Wojciecha Czerwińskiego w  $\Delta_{18}^9$  i Marii Donten-Bury w  $\Delta_{10}^{11}$ ) może zastanowić się nad następującym problemem: czy dla ustalonych  $k_1, k_2, \dots, k_l$  i jednoliterowego alfabetu  $\{a\}$  język  $L = \{a^n : \text{Ada ma strategię wygrywającą dla } n \text{ kamyków}\}$  jest regularny? Czy to, że języki regularne są rozpoznawane przez deterministyczne automaty skończone, pozwala jakoś inaczej wywnioskować, że nasz problem można rozwiązać algorytmem o prostej strukturze?

Jak widać, nawet zadania maturalne potrafią prowadzić ku zagadnieniom o głębokim charakterze teoretycznym. To pokazuje, jak bogaty i zaskakujący może być świat nauki, który kryje się za pozornie prostymi problemami.