Kto da więcej?

*Paweł Rafał BIELIŃSKI**

* Nauczyciel, Warszawa

Czytelnik musi zostać ostrzeżony, że w niniejszym artykule błyskotliwe chwyty prowadzić będą do gorszych wyników. Znacznie lepiej sprawdzą się brutalne, brudne metody. Kto liczy na zwycięstwo sprytu i dobrego stylu, niech lepiej zmieni lekturę.

Zadanie. Danych jest 7 liczb: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Zostały one w nieznany sposób podzielone na 3 grupy. Dla wybranej przez siebie liczby naturalnej k udowodnij, że iloczyn liczb w pewnej grupie musi wynieść co najmniej k. Im większe k, tym lepiej.

O zasadzie szufladkowej pisaliśmy np. w Δ^8_{04} oraz Δ^9_{18}.

Dziękuję Szymonowi Gramatnikowskiemu za zainspirowanie przedstawionego obok rozumowania.

Sposób 1, $k = 105$. Wykorzystując zasadę szufladkową, można przekonać się, że w którejś z trzech grup muszą znaleźć się co najmniej 3 liczby. Istotnie, gdyby w każdej z trzech grup było nie więcej niż po dwie liczby, to łącznie byłoby ich nie więcej niż $3 \cdot 2 = 6 < 7$. Iloczyn liczb w takiej grupie wynosi zaś co najmniej $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Uwaga. Niekiedy oszacowanie tego rodzaju można poprawić, ignorując najmniejsze liczby, żeby skupić uwagę na większych. W tym przypadku, odrzucając liczby 3, 5, 7, pozostajemy z czterema: 9, 11, 13, 15. Są to 4 liczby w trzech grupach, więc któraś z grup musi zawierać przynajmniej dwie z nich. Jej iloczyn wynosi wówczas co najmniej $9 \cdot 11 = 99$. Zgodnie z zapowiedzią spryt wcale nam się nie opłacił.

Sposób 2, $k = 127$. Aby poprawić poprzedni wynik, spróbujemy wykorzystać sztuczkę podobną do zasady szufladkowej, ale bezpośrednio do iloczynu danych liczb. Otóż gdyby iloczyn liczb w każdej z grup wynosił mniej niż 127, to iloczyn wszystkich liczb we wszystkich grupach byłby nie większy od $126 \cdot 126 \cdot 126 = 2\,000\,376$. Jest to niemożliwe, bo iloczyn danych liczb jest nam znany i wynosi $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 15 = 2\,027\,025$. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy.

Uwaga. Ponieważ $127 \cdot 127 \cdot 127 = 2\,048\,383$, więc technika ta nie zadziała dla żadnego większego k. Można natomiast nieco poprawić otrzymany wynik, zauważając, że iloczyn liczb w każdej grupie musi być dzielnikiem liczby $2\,027\,025$. Wyklucza to wszystkie liczby od 127 do 134 włącznie i pozwala uzyskać $k = 135$.

Sposób 3, $k = 143$. Przypuśćmy, że iloczyn w każdej z grup jest mniejszy od 143. Analizując wszelkie możliwe sytuacje, doprowadzimy do sprzeczności. Grupę, w której skład wchodzi liczba 15, nazwiemy grupą czerwoną. W grupie tej może znajdować się jeszcze co najwyżej jedna liczba, bo w przeciwnym razie jej iloczyn wyniósłby co najmniej $15 \cdot 3 \cdot 5 = 225$. Liczbą tą może być co najwyżej 9, bo już $15 \cdot 11 = 165$. Możemy bez straty ogólności założyć, że liczba 9 jest w czerwonej grupie (wyjaśnienie znajduje się na marginesie). Poza czerwoną grupą znajdują się liczby 3, 5, 7, 11, 13. Grupę, w której występuje 13, nazwiemy niebieską. Oprócz liczby 13 może być w niej jeszcze co najwyżej jedna liczba, bo już $13 \cdot 3 \cdot 5 = 195$. Liczba ta może być równa co najwyżej 7, bo $13 \cdot 11 = 143$. Podobnie jak ostatnio, możemy założyć, że liczba 7 jest w grupie niebieskiej. Oznacza to, że w pozostałej grupie, którą nazwiemy żółtą, znajdują się liczby 3, 5, 11, których iloczyn wynosi 165! Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi tezy.

W ogólnym przypadku, jeśli liczba 9 nie jest w czerwonej grupie, to zamieńmy ją miejscami z liczbą mniejszą niż 15 z czerwonej grupy (jeżeli taka liczba nie istnieje, to po prostu dołóżmy 9 do tej grupy). W efekcie otrzymamy nowy podział na grupy, w którym liczba 9 już jest w czerwonej grupie, a ponadto jeśli iloczyn 142 nie był przekroczony wcześniej, to nadal nie będzie.

Uwaga. Osiągniętego tu oszacowania nie można już poprawić. Istotnie, jeśli w pierwszej grupie umieścimy liczby 3, 5, 7, w drugiej – 9 i 15, a w trzeciej 11 i 13, to otrzymujemy iloczyny 105, 135, 143, z których żaden nie jest większy od 143.

Powyższe przykłady obrazują, że im głębiej wejdzie się w strukturę problemu, im więcej jego szczególnych cech się wykorzysta, tym silniejsze wnioski można wyciągnąć. Tym niemniej, można docenić Sposoby 1 i 2, bo one również dają niezłe, być może zadowalające oszacowania, i to przy znacznie mniejszym nakładzie pracy. Tymczasem Sposób 3 wymagał bardzo skrupulatnej analizy, która byłaby znacznie trudniejsza do przeprowadzenia, gdyby danych liczb było nie 7, ale choćby 10.

Czytelnikowi pozostawiamy następujące wyzwanie.

Problem. Danych jest 9 liczb: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. Zostały one w nieznany sposób dobrane w 4 grupy. Dla wybranej przez siebie liczby naturalnej k udowodnij, że iloczyn liczb w pewnej grupie musi wynieść co najmniej k. Im większe k, tym lepiej.