

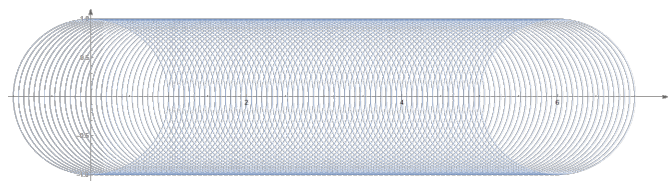
Artystyczne piękno osobliwych zbiorów

Iza DANIELEWSKA, Dawid POŁAWSKI, Michał ZWIERZYŃSKI

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Ilustracje zdobiące niniejszy artykuł to tzw. *kaustyki Wignera* oraz *zbiory środka symetrii* zamkniętej, gładkiej krzywej płaskiej. Od lat 70. XX wieku aż po dziś dzień obiekty te znajdują zastosowanie w rozmaitych dziedzinach, takich jak semiklasyczna fizyka kwantowa, teoria osobliwości czy geometria różniczkowa. Można je interpretować jako obwiednie (za moment wytłumaczymy, czym są) specjalnych rodzin prostych, co nadaje im nie tylko głębokie znaczenie geometryczne, lecz także wybitną wartość artystyczną, odzwierciedlającą piękno i harmonię matematyki.

Opiszmy najpierw pokrótce, czym jest wspomniana już obwiednia. *Obwiednią* rodziny krzywych nazywamy zbiór styczny do każdej z tych krzywych, którego każdy punkt stanowi punkt styczności do jednej z krzywych. Intuicyjnie można ją sobie wyobrazić tak, że każdy punkt obwiedni to punkt przecięcia dwóch „nieskończenie bliskich” krzywych z badanej rodziny. Na przykład, jeśli wyobrazimy sobie rodzinę okręgów o promieniu 1 i o środkach leżących na osi OX , obwiednią będą dwie proste: $y = 1$ oraz $y = -1$ (rys. 1).



Rys. 1. Rodzina okręgów i ich obwiednia

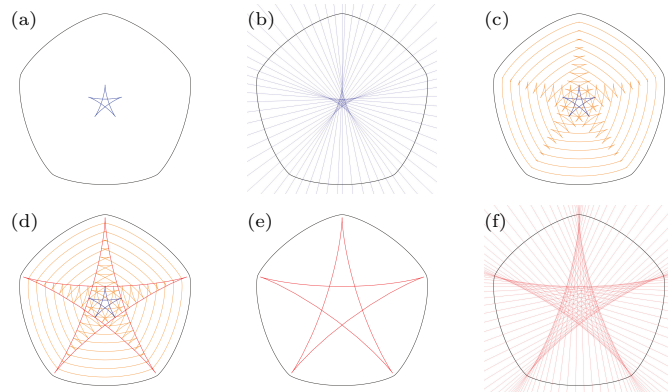
Mając krzywą płaską γ , parę różnych punktów a, b leżących na tej krzywej nazywamy *parą równoległą*, jeśli styczne do tej krzywej w tych dwóch punktach są prostymi równoległymi (piszemy wtedy $a \parallel b$). Przykładowo, gdy γ jest okręgiem, to każda para punktów antypodycznych (czyli takich, które są końcami pewnej średnicy tego okręgu) jest parą równoległą.

Przystąpmy do definicji osobliwych zbiorów przytoczonych we wstępie artykułu. Ustalmy na początku krzywą płaską γ oraz liczbę rzeczywistą λ . *Zbiorem afinicznie λ -równoodległym* nazywamy zbiór

$$E_\lambda(\gamma) := \{\lambda a + (1 - \lambda)b : a, b \in \gamma, a \parallel b\}.$$

Innymi słowy (w przypadku $\lambda \in (0, 1)$), gdy mamy odcinek o końcach w parze równoległej, to punkt dzielący ten odcinek w stosunku λ należy do $E_\lambda(\gamma)$. *Kaustyką Wignera* krzywej γ nazywamy zbiór $E_{0,5}(\gamma)$. Początek rozważań nad kaustyką Wignera zawdzięczamy sir Michaelowi Berremu oraz Nándorowi Balázslowi [1], którzy badali fazowo-przestrzenną reprezentację Wignera stanów kwantowych. Zbiór $E_\lambda(\gamma)$ można również reprezentować jako obwiednię rodziny swoich stycznych (rys. 2(b)). Już za chwilę zdefiniujemy ostatni zbiór, nazywany *zbiorem środka symetrii*, który po raz pierwszy, w trochę innych terminach geometrycznych, zdefiniował Stanisław Janeczko [3]. *Afiniczną cięciwą*

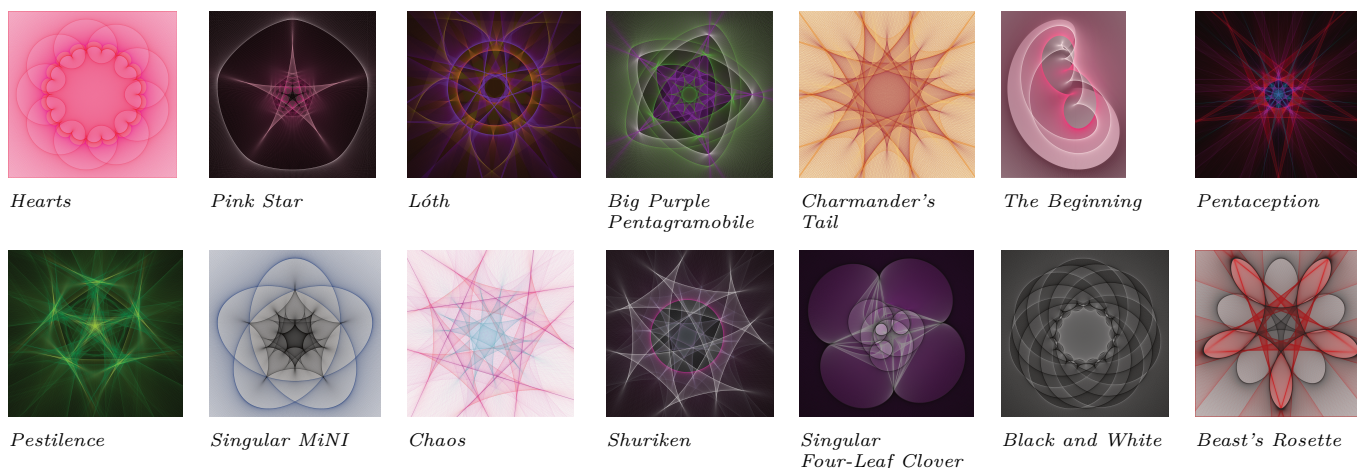
krzywej γ nazywamy prostą przechodzącą przez parę równoległą krzywej γ . *Zbiór środka symetrii* jest obwiednią rodziny wszystkich cięciw afinicznych naszej początkowej krzywej (rys. 2(f)); będziemy go oznaczać $CSS(\gamma)$. Okazuje się, że zbiór środka symetrii krzywej γ jest również zbiorem wszystkich punktów osobliwych (najczęściej ostrzy) rodziny wszystkich zbiorów afinicznie λ -równoodległych krzywej γ (rys. 2(c,d)).



Rys. 2. Osobliwe zbiory krzywej γ : (a) Zbiór $E_{0,5}(\gamma)$; (b) Zbiór $E_{0,5}(\gamma)$ jako obwiednia prostych; (c) Zbiory afinicznie λ -równoodległe krzywej γ ; (d) Zbiory afinicznie λ -równoodległe krzywej γ oraz $CSS(\gamma)$; (e) Zbiór $CSS(\gamma)$; (f) $CSS(\gamma)$ jako obwiednia cięciw afinicznych;

Zbiory omówione w niniejszym artykule charakteryzują się wieloma interesującymi własnościami geometrycznymi, których pełny opis wykracza poza ramy tego tekstu. Dziedziny nauki zajmujące się tymi strukturami dynamicznie się rozwijają, a na ich temat regularnie publikowane są nowe prace naukowe. Znaczna część wiedzy dotyczy lokalnych własności tych zbiorów w przestrzeniach n -wymiarowych. Natomiast w przypadku ich własności globalnych, takich jak liczba punktów osobliwych, obecny stan wiedzy pozwala na formułowanie precyzyjnych twierdzeń jedynie w odniesieniu do krzywych. Więcej na temat geometrycznych własności oraz literatury tego przedmiotu można przeczytać w [2].

Dzięki możliwości opisanego rozważanych zbiorów za pomocą obwiedni rodziny prostych otwiera się przed nami przestrzeń do ich graficznej prezentacji. Autorzy niniejszego artykułu, wspólnie z Dominiką Sterczewską, wykorzystali oprogramowanie *Mathematica*, aby stworzyć artystyczne wizualizacje – różnorodne, niebanalne, otwarte na rozmaite interpretacje. Te niepowtarzalne i osobliwe obrazy stanowią wyjątkowe połączenie matematycznej precyzji i kreatywnego piękna. Refleksje o ich unikatowym charakterze można było usłyszeć wśród uczestników miniwystawy zorganizowanej z okazji obchodów XXV-lecia Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej (28.11.2024 r.), za co autorzy są bardzo wdzięczni Organizatorom tego wydarzenia. Szczegółowy



Literatura

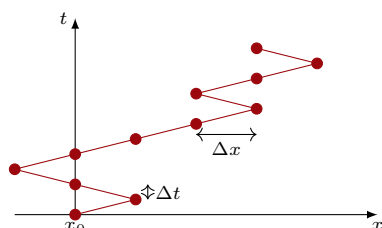
- [1] M.V. Berry, N.L. Balazs, *Evolution of Semiclassical Quantum States in Phase Space*, J. Phys. A Math. Gen. 12 (1979), 625–642
- [2] I. Danielewska, D. Poławski, D. Sterczewska, M. Zwierzyński, *Artistic Aspects of the Wigner Caustic and the Centre Symmetry Set*, arXiv:2409.04443
- [3] S. Janeczko, *Bifurcations of the Center of Symmetry*, Geom. Dedicata 60 (1996), 9–16

opis tworzenia wizualizacji, wraz z przykładowym kodem w programie *Mathematica*, znajduje się w [2]. Na rysunkach powyżej prezentujemy wybrane wizualizacje. Mamy szczerą i serdeczną nadzieję, że te obrazy przypadną do gustu Czytelnikom *Delty* i zainspirują ich do zgłębiania piękna osobliwej geometrii różniczkowej. Być może niektórzy z Państwa skorzystają z przykładowego kodu napisanego w programie *Mathematica*, zamieszczonego w [2], i sami podejmą próbę stworzenia własnych, niezwykłych wizualizacji tych tajemniczych geometrycznych zbiorów, odkrywając jednocześnie magię, jaką jest matematyka.

* Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska



Rys. 1



Rys. 2. Wykres prezentuje położenie cząsteczki (x) w zależności od czasu (t)

O błądzeniu losowym można przeczytać również w tekście Michała Miśkiewicza *Dyskretny wzór Itô z Δ_{23}^{10}* .

Zrozumieć dyfuzję

Karolina PAWLAK*

Ostatnio bardzo popularne stały się dyfuzory zapachowe, które potrafią otulić naszą domową przestrzeń przyjemnymi wonnościami i wprawić nas w dobry nastrój. Ale czy zastanawialiście się kiedyś, w jaki sposób dochodzi do rozprzestrzeniania się zapachów w pomieszczeniu? W przypadku dyfuzorów zapachowych nośnikiem zapachu są patyczki ratanowe, zanurzone w szklanym pojemniku wypełnionym olejem eterycznym (rys. 1). Dzięki porowatej strukturze patyczków ciecz jest wchłaniana i przenoszona aż do ich wierzchołków, gdzie olejek zaczyna odparowywać z powierzchni. Następnie cząsteczki substancji zapachowej ulegają niezliczonym zderzeniom z cząsteczkami powietrza. To je napędza i sprawia, że rozpraszają się po pomieszczeniu, a my cieszymy się pięknym aromatem. Opisane zjawisko przemieszczania się substancji z obszaru o wyższym jej stężeniu do obszaru o niższej koncentracji nazywamy **dyfuzją**.

Sprawdźmy, jak rachunek prawdopodobieństwa może nam pomóc dokładniej opisać proces dyfuzji. Wyobraźmy sobie, że mamy cząsteczkę perfum w punkcie x_0 , która porusza się wzdłuż osi OX i w czasie $\Delta t > 0$ przemieszcza się o $\Delta x > 0$ w prawo lub w lewo (rys. 2). Przyjmujemy, że prawdopodobieństwo pójścia w prawo/lewo w każdym kroku wynosi $\frac{1}{2}$. Jeśli n jest liczbą skoków, jakie wykonała cząsteczka, to $n = n_+ + n_-$, gdzie n_+ to liczba skoków w prawo, a n_- to liczba skoków w lewo. Ponadto $t = n\Delta t$ jest całkowitym czasem jej ruchu. Natomiast jeśli przez x oznaczmy przemieszczenie cząsteczki względem punktu x_0 , to liczba $m = \frac{x}{\Delta x}$ wyraża wielkość przemieszczenia w punktach kratowych i oczywiście $m = n_+ - n_-$. Zatem liczby skoków w prawo/lewo możemy wyrazić wzorami:

$$n_- = \frac{n - m}{2}, \quad n_+ = \frac{n + m}{2}.$$

Chcemy obliczyć $P(m, n)$, czyli prawdopodobieństwo, że po n krokach cząsteczka przemieści się o m punktów kratowych względem położenia początkowego x_0 . Przy każdym skoku mamy dwie równoprawdopodobne możliwości ruchu. Zatem wszystkich możliwych realizacji n kroków jest 2^n i każda ma takie samo prawdopodobieństwo zaistnienia. Aby po n krokach znaleźć się w pozycji m ,