

Jeżeli to prawda, to każdy graf planarny można tak pokolorować czterema kolorami, że wędrując wzdłuż dowolnej ścieżki, być może natrafimy na 2024 identyczne segmenty z rzędu, ale na pewno nie na 2025. Jest to nieco łagodniejsza wersja hipotezy z roku 2000, która postulowała silniejszą nierówność $\pi_{2000}(G) \leq 4$. W przyszłym roku, a także prawdopodobnie w wielu kolejnych latach, ulegnie ona kolejnym osłabieniom. Obecnie nie wiadomo nawet, czy ma szansę być kiedykolwiek prawdziwa, to znaczy, czy nierówność $\pi_k(G) \leq 4$ może zachodzić, przy pewnym skończonym k , dla wszystkich grafów planarnych G . Być może liczba 4

w tej nierówności jest zbyt mała, wiadomo jednak, że nie można jej już obniżyć, istnieją bowiem grafy planarne, w których pojawiają się dowolnie długie jednobarwne ścieżki przy dowolnych kolorowaniach trzema kolorami. Jeżeli cztery kolory nie wystarczą do uniknięcia repetycji o dowolnie dużej krotności na grafach planarnych, to może trzeba użyć w tym celu pięciu, sześciu, trzynastu albo sześciuset sześćdziesięciu sześciu kolorów...? Dla pewnej liczby $r \leq 768$ hipoteza musi być prawdziwa przy być może gigantycznym, ale skończonym k . Chciałoby się poznać najmniejsze takie r , a zaraz potem najmniejsze takie k , chociaż właściwie nie wiadomo po co...



Kąt Otwarty 3°: Nonszalanckie słowotwórstwo

Bartłomiej PAWLIK

Politechnika Śląska

Skończony ciąg elementów danego zbioru Σ nazywamy *słowem nad alfabetem* Σ . O ile nie prowadzi to do niejednoznaczności, słowo zapisujemy jako konkatenację elementów zbioru Σ . Na przykład słowo $(s, \mathfrak{x}, o, w, o)$ nad alfabetem $\Sigma = \{\mathfrak{x}, o, s, w\}$ można zapisać jako **słowo**.

Rozszerzeniem słowa PS jest słowo PxS , gdzie x jest literą (każde ze słów P, S może być słowem pustym). Przykładowym rozszerzeniem słowa **bak** jest **bark**, a rozszerzeniem słowa **bark** jest **barek**.

Niech X będzie słowem niepustym. Słowo postaci XX (np. **kuskus**) nazywamy *kwadratem*. Mówimy, że słowo $PXXS$ zawiera kwadrat XX , natomiast *słowem bezkwadratowym* jest takie, które nie zawiera żadnego kwadratu. Zatem **matematyka** jest słowem bezkwadratowym, a **filologia** nim nie jest (zawiera kwadrat **lolo**).

Dany jest alfabet Σ (zakładamy, że jest *uporządkowany*, czyli litery mają – jak to w alfabecie – pewną kolejność). Rozważmy następującą *procedurę nonszalancką*: Zaczynamy od słowa pustego $W_0 = \varepsilon$. W n -tym kroku procedury tworzymy rozszerzenie W_n poprzedniego słowa W_{n-1} w następujący sposób: na końcu słowa W_{n-1} wstawiamy możliwie najmniejszą literę x taką, że otrzymane słowo $W_n = W_{n-1}x$ jest bezkwadratowe. Jeżeli nie jest to możliwe, to próbujemy wstawić jak najmniejszą literę tuż przed ostatnią literą naszego słowa. Jeżeli to też jest niemożliwe, to próbujemy wstawić jak najmniejszą literę przed ostatnimi dwiema literami itd. Reasumując, w każdym kroku staramy się najdalej, jak tylko można, wstawić jak najmniejszą literę, by uzyskać słowo bezkwadratowe.

Zauważmy, że nad alfabetem $\{a, b\}$ procedura kończy się szybko:

$$\varepsilon \rightarrow \underline{a} \rightarrow \underline{ab} \rightarrow \underline{aba}.$$

Każde rozszerzenie słowa **aba** zawiera kwadrat, więc nie sposób otrzymać kolejnego rozszerzenia.

Co się stanie, gdy zwiększymy alfabet? Dla alfabetu ternarnego $\{a, b, c\}$ początkowych kilka słów to

$$\begin{aligned} \varepsilon &\rightarrow \underline{a} \rightarrow \underline{ab} \rightarrow \underline{aba} \rightarrow \underline{abac} \rightarrow \underline{abaca} \rightarrow \underline{abacab} \rightarrow \underline{abacaba} \rightarrow \\ &\rightarrow \underline{abacabca} \rightarrow \underline{abacabcac} \rightarrow \underline{abacabcacb} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Czy i w tym przypadku procedura dobiega końca po skończonej liczbie kroków?

Nie wiadomo. Teoretycznie nie można tego wykluczyć, ponieważ wiemy, że nad alfabetem ternarnym istnieje nieskończenie wiele słów, których każde rozszerzenie zawiera kwadrat. Obecnie wiemy również, że nie ma ani jednego słowa o tej własności nad alfabetem 17-elementowym (więc nad takim alfabetem procedura nonszalancka nigdy się nie zakończy).

A czy istnieją słowa, których każde rozszerzenie zawiera kwadrat w przypadku alfabetów mocy od 4 do 16? Jak powyżej – **nie wiadomo**.

