

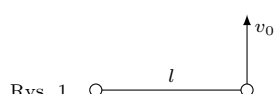
Klub 44 F



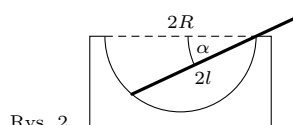
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2025

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
784 ($WT = 2,6$), 785 ($WT = 3$)
z numeru 10/2024

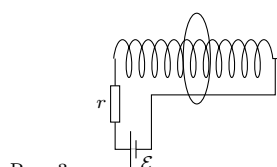
Jacek Konieczny (Poznań) 40,87
Tomasz Wietecha (Tarnów) 17–40,40
Jan Zambrzycki (Białystok) 4–29,34
Andrzej Nowogrodzki
(Chocianów) 3–27,49



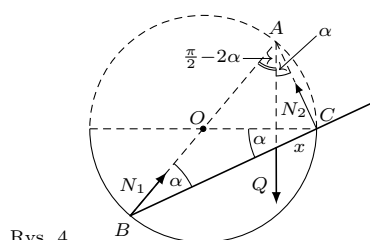
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Z warunku $\cos \alpha \leq 1$ otrzymujemy warunek na maksymalną długość pręta $2l \leq 4R$. Minimalna długość pręta, dla której możliwa jest jeszcze opisana równowaga, odpowiada sytuacji, gdy pręt opiera się na krawędzi czaszy swoim prawym końcem. Wtedy $x = l$ i zgodnie z (1)

$$2R \cos(\alpha_{\max}) = 2l_{\min}.$$

Podstawiając do tego równania warunek równowagi (3), otrzymujemy

$$2l_{\min} = 2R\sqrt{2/3}.$$

Odpowiadająca tej minimalnej długości wartość graniczna kąta określona jest warunkiem

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{l_{\min}}{R} = \sqrt{2/3}.$$

Podsumowując, opisany w zadaniu stan równowagi jest możliwy, gdy długość pręta spełnia warunek:

$$2R\sqrt{2/3} < 2l < 4R,$$

a kąt w stanie równowagi określa wzór (3).

Jeżeli $L = 2l > 4R$, to środek ciężkości pręta znajduje się poza krawędzią czaszy i pręt z niej wypada. Gdy pręt jest zbyt krótki, ześlizguje się do wnętrza czaszy.

Zadania z fizyki nr 798, 799

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

798. Dwie bardzo małe jednakowe kulki związane nieważką, nierozciągliwą nicią leżą na powierzchni poziomej (rys. 1). Jednej z kulek nadano prędkość v_0 skierowaną pionowo w górę. Jaka powinna być wartość tej prędkości, aby druga kulka nie oderwała się od poziomej powierzchni, a nie przez cały czas była naciągnięta? Po jakim torze porusza się wtedy pierwsza kulka? Tarcie kulki o podłoże jest zaniedbywalne.

799. Elektron krąży po orbicie kołowej w jednorodnym polu magnetycznym. Indukcja pola magnetycznego zostaje powoli zwiększona trzy razy, w czasie wielokrotnie przewyższającym okres obrotu. Ile razy zmieni się w tym czasie promień orbity elektronu?

Rozwiązania zadań z numeru 1/2025

Przypominamy treść zadań:

790. Jednorodny pręt o długości $2l$ opiera się na krawędzi nieruchomej, półkolistej czaszy o promieniu R (rys. 2). Jaki kąt α tworzy pręt z płaszczyzną poziomą w położeniu równowagi? Tarcie zaniedbujemy.

791. O jaką wielkość zmieni się natężenie prądu w kołowej pętli z nadprzewodnika, gdy nałożymy ją na długą zwojnicę podłączoną do baterii o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ (rys. 3). Całkowity opór obwodu ze zwojnicą wynosi r , liczba zwojów N , współczynnik samoindukcji zwojownicy L_0 , a pętli L . Indukcję wzajemną zaniedbujemy.

790. Na pręt działa siła ciężkości Q oraz siły reakcji N_1 i N_2 (rys. 4). Gdy nie ma tarcia, siła reakcji jest prostopadła do powierzchni, po której ślizga się punkt styku. N_1 jest prostopadła do powierzchni czaszy, czyli działa wzdłuż promienia, N_2 jest prostopadła do pręta. W położeniu równowagi proste, wzdłuż których działają siły przyłożone do pręta, przecinają się w jednym punkcie, bo ich moment wypadkowy względem dowolnego punktu wynosi 0. Z rysunku 4:

$$(1) \quad |BC| = 2R \cos \alpha, \quad x = 2R \cos \alpha - l, \quad |OC| = R = x \cos \alpha + R \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right),$$

stąd otrzymujemy równanie:

$$(2) \quad 4R \cos^2 \alpha - l \cos \alpha - 2R = 0.$$

Ponieważ kąt α leży w pierwszej ćwiartce, wybieramy dodatnie rozwiązanie równania (2):

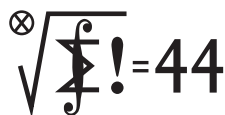
$$(3) \quad \cos \alpha = \frac{(l + \sqrt{l^2 + 32R^2})}{8R}.$$

791. Niech I_0 oraz I oznaczają początkowe i końcowe natężenie prądu w pętli. Natężenie prądu w zwojnicy nie zmienia się i wynosi $\frac{\mathcal{E}}{r}$, co daje strumień przez jeden zwoj $\frac{L_0 \mathcal{E}}{rN}$. Strumień ten przenika nadprzewodzącą pętlę nałożoną na zwojnicę. Całkowity strumień ϕ przez pętlę, zgodnie z prawem Faradaya, spełnia równanie $0 = -\frac{d\phi}{dt}$, gdzie w lewej części mamy spadek napięcia na zerowym oporze nadprzewodnika. Zatem całkowity strumień pola magnetycznego przez pętlę pozostaje stały: $\phi = LI_0 = \text{const}$. Przy zmianie zewnętrznego pola magnetycznego w pętli pojawia się prąd indukcyjny, którego pole magnetyczne kompensuje zmianę strumienia pola magnetycznego. Zatem

$$LI \pm \frac{L_0 \mathcal{E}}{rN} = LI_0, \quad \text{albo} \quad I_0 - I = \pm \frac{L_0 \mathcal{E}}{LrN}.$$

Dwuznaczność we wzorze związana jest z dwiema możliwościami wzajemnej orientacji pól magnetycznych zwojnicy i pętli. Jednakowej orientacji odpowiada znak $+$, przeciwnej znak $-$. W pierwszym przypadku prąd w pętli maleje, w drugim rośnie.

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2025

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
887 ($WT = 1,69$) i 888 ($WT = 1,64$)
z numeru 10/2024

Mikołaj Pater	46,28
Witold Bednarek	45,33
Tomasz Wietecha	45,31
Krzysztof Zygan	42,03
Andrzej Kurach	38,67
Andrzej Daniluk	37,89
Michał Warmuz	36,54
Marcin Kasperski	35,64
Grzegorz Wiączkowski	34,61
Krzysztof Kamiński	33,54
Janusz Olszewski	33,10
Jędrzej Biedrzycki	32,29
Marian Łupieżowicz	31,29

Klubowym nowicjuszem nie jest żaden z trzech Panów; Weteranem – każdy z nich; niektórzy z imponującym stażem. Magiczną linię 44 p. przekraczają: pan Mikołaj Pater – po raz czwarty; pan Witold Bednarek – po raz dziesiąty; pan Tomasz Wietecha – po raz piętnasty!

Przyjmijmy (b.s.o.), że punkt L leży bliżej prostej AE niż punkt K . Konfiguracja punktów i kątów jest wówczas jak na rysunku.

Uzupełniamy trójkąt AKE do równoległoboku $AKEJ$; punkt C jest jego środkiem symetrii. Trójkąty AKB i EJD są symetryczne względem C . Zatem $\sphericalangle AKB = \sphericalangle EJD$. Stąd, wobec (1), $\sphericalangle EJD + \sphericalangle DLE = 180^\circ$, co oznacza, że także czworokąt $JDLE$ ma okrąg opisany. Dostajemy równość

$$(3) \quad \sphericalangle JLD = \sphericalangle JED = \sphericalangle KAB.$$

Dodajemy (2) i (3)

(uwzględniając, że $\sphericalangle NLK + \sphericalangle JLD = \sphericalangle JLK$):

$$\sphericalangle JLK = \sphericalangle NMK + \sphericalangle KAB.$$

Suma po prawej stronie wynosi 90° (dzięki założeniu $MN \perp AE$). Tak więc trójkąt JKL jest prostokątny. Punkt C jest środkiem przeciwprostokątnej JK . Stąd, ostatecznie, $CK = CL$.

894. Oznaczmy: $w = yz + 1$ (jest to liczba względnie pierwsza z y). Zadaną równość przepisujemy tak:

$$\frac{xw + y}{w} = \frac{2025}{44}.$$

To równość dwóch nieskracalnych ułamków. Muszą mieć równe liczniki i mianowniki, ewentualnie ze znakiem zmienionym na przeciwny. Więc na pewno $w = \pm 44$. Stąd $yz = w - 1 \in \{43, -45\}$, wobec czego $|y| \leq 45$, $|z| \leq 45$.

Przyrównanie liczników: $xw + y = \pm 2025$. Pamiętając, że $w = \pm 44$, mamy

$$y = \pm 2025 \mp 44x \equiv \pm 1 \pmod{44}.$$

To zawęża poszukiwanie do następujących par (w, y) : $(44, 1)$, $(44, -1)$, $(44, 43)$, $(44, -43)$, $(-44, 1)$, $(-44, -1)$,

Zadania z matematyki nr 901, 902

Redaguje Marcin E. KUCZMA

901. Trapez równoramienny $ABCD$ jest wpisany w okrąg Ω o średnicy AB . Przekątne trapezu, długości d , przecinają się w punkcie P . Okrąg styczny do odcinków PC , PD i do krótkiego łuku CD (okręgu Ω) ma promień r . Okrąg wpisany w trójkąt ABP ma promień $3r$. Obliczyć stosunek r/d .

902. Dla liczby naturalnej n niech $w(n)$ oznacza największy całkowity wykładnik, dla którego $n!$ dzieli się przez $10^{w(n)}$, i niech $f(n) = 10^{-w(n)}n!$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej m spełniona jest zależność $f(5^m) \equiv 2^m \pmod{5}$.

Zadanie 902 zaproponował pan Cezary Głowacz z Bonn.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2025

Przypominamy treść zadań:

893. Punkty A, B, C, D, E leżą w tym porządku na linii prostej, przy czym $CA = CE$, $CB = CD$. Poza tą prostą, po jednej jej stronie, leżą punkty K i L takie, że trójkąty AKB i DLE mają ostre kąty przy wierzchołkach A, B i D, E , a suma miar tych czterech ostrych kątów wynosi 180° . Proste KB i LD przecinają się w punkcie N ; proste AK i EL przecinają się w punkcie M ; punkty M, N leżą po różnych stronach prostej KL , a ponadto $MN \perp AE$. Dowieść, że $CK = CL$.

894. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb całkowitych (x, y, z) spełniające równanie

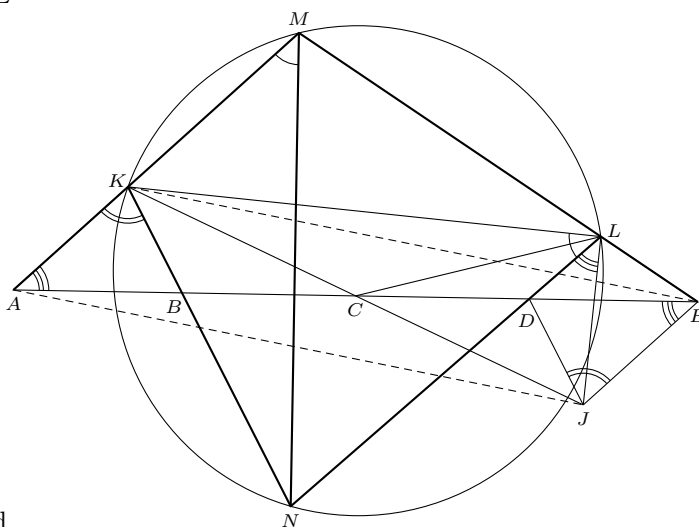
$$\frac{x + y + xyz}{yz + 1} = \frac{2025}{44}.$$

893. Rachunek kątów w trójkątach AKB i DLE pokazuje, że

$$(1) \quad \sphericalangle AKB + \sphericalangle DLE = 180^\circ.$$

Stąd wniosek, że czworokąt $KMLN$ ma okrąg opisany, wobec czego

$$(2) \quad \sphericalangle NLK = \sphericalangle NMK.$$



$(-44, 45)$, $(-44, -45)$. Z wyjściowego równania mamy

$$x = \frac{2025}{44} - \frac{y}{w}.$$

Z wypisanych ośmiu par (w, y) jedynie pierwsza, czwarta, szósta, ósma dają (przy użyciu ostatniego wzoru) całkowite wartości x : odpowiednio 46, 47, 46, 45. Wartość $z = (w - 1)/y$ wynosi, odpowiednio, 43, -1, 45, 1.

Badane równanie może więc być spełnione jedynie przez cztery trójki (x, y, z) – i faktycznie jest spełnione, co łatwo sprawdzić wprost:

$$(46, 1, 43), (47, -43, -1), (46, -1, 45), (45, -45, 1).$$

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie:
www.deltami.edu.pl/klub-44/regulamin/