

Twierdzenia Thuego zostały opublikowane w dwóch pracach, w roku 1906 i 1912, w mało znanym czasopiśmie. Przez wiele lat pozostawały niezauważone. Były zresztą odkrywane niezależnie przez wielu badaczy w rozmaitych kontekstach (układy dynamiczne, teoria grup, turnieje szachowe, zagadnienia sprawiedliwego podziału etc.). Obecnie uznaje się je za początek *kombinatoryki na słowach* – obszernej dziedziny o licznych zastosowaniach i powiązaniach z różnymi działami matematyki i informatyki, a także biologii obliczeniowej.

W listowym kolorowaniu grafu dzieją się rzeczy dziwne. Przypuśćmy, że graf G da się poprawnie pokolorować dwoma kolorami. Ktoś przydzieli wierzchołkom palety kolorów, po sto w każdej. Czy możemy mieć pewność, że uda nam się poprawnie pokolorować graf G , wybierając każdemu wierzchołkowi kolor z jego palety? Okazuje się, że w wielu przypadkach odpowiedź jest negatywna – istnieją rozmieszczenia palet (z dowolnie dużą liczbą kolorów) tak złośliwe, że jest to niewykonalne!

Już w roku 1906 Thue skonstruował z trzech liter nieskończony ciąg, w którym *żadne dwa sąsiadujące segmenty nie są identyczne*. Można go otrzymać z ciągu N , odczytując liczbę wystąpień litery L pomiędzy kolejnymi literami P:

Podstawiając $2 = P$, $1 = L$ i $0 = S$, dostajemy paradiddle na dwie ręce i stopę, w którym żaden segment nie powtarza się dwa razy z rzędu:

Ta własność ciągu T wynika wprost z tego, że w ciągu N nie ma nakładających się identycznych segmentów. Na przykład zaznaczone powyżej segmenty w ciągu T nie są identyczne, choć różnią się jedynie na ostatniej pozycji.

Ciąg składający się z sąsiadujących powtórzeń tego samego segmentu nazywamy *repetycją*. Liczba tych segmentów to *krotność* repetycji. Na przykład ciągi PP, PLPL, LPPLPP, PLPSPLPS to repetycje dwukrotne, PPP, PSPSPS, LLSLLSLLS to repetycje trzykrotne, natomiast PPLSPPLSPPLSPPLS to repetycja czterokrotna. Nieskończony ciąg okresowy to oczywiście repetycja o krotności nieskończonej. Twierdzenia Thuego orzekają zatem, że istnieje nieskończony ciąg binarny bez repetycji trzykrotnych (ciąg N) oraz nieskończony ciąg ternarny bez repetycji dwukrotnych, a tym samym bez żadnych repetycji (ciąg T).

Odkrycia Thuego, wzmocnione doznaniem muzycznym, wciąż ekscytują badaczy. Pojawiają się rozmaite warianty, uogólnienia, nowe problemy otwarte. Oto próbka zawartości tego „rogu obfitości”.

Problem 1. Niech dany będzie nieskończony ciąg zbiorów trójelementowych $A_1, A_2, A_3, \dots$. Czy z każdego z nich można wybrać element $a_i \in A_i$ tak, aby nieskończony ciąg $a_1 a_2 a_3 \dots$ nie zawierał żadnych repetycji?

Twierdzenie Thuego odpowiada przypadkowi, kiedy wszystkie zbiory są identyczne. Jeżeli choć dwa zbiory A_i są różne, to mamy w sumie więcej różnych liter do dyspozycji i wydaje się, że utworzenie ciągu bez repetycji powinno być nawet łatwiejsze. Jednakże nikt jak dotąd nie podał rozwiązania problemu 1 w pełnej ogólności. Znalaziono natomiast rozwiązania pewnych szczególnych przypadków. Wiadomo, że odpowiedź jest pozytywna, jeżeli wszystkie zbiory A_i są czteroelementowe, a także jeżeli są trójelementowymi podzbiorami tego samego zbioru czteroelementowego. Ostatnio podjęta próba sprowadza problem do komputerowego sprawdzenia skończonej liczby przypadków, która wszakże jest na tyle duża, że na ostateczny efekt przyjdzie jeszcze poczekać.

Repetycje anagramowe

9

repetycją anagramową. Innymi słowy jest to taki ciąg, który można rozciąć jednym cięciem na dwie części, z których każda ma tyle samo wystąpień każdej litery, na przykład PLLSSSPLSSLS. Repetycje anagramowe wielokrotnie definiujemy analogicznie do zwykłych repetycji, jako sklejenie wielu anagramów tego samego słowa. Na przykład KTOTOKKOT jest trzykrotną repetycją anagramową.

Słynny matematyk Paul Erdős zainspirowany twierdzeniami Thuego zadał takie oto pytanie: *Czy istnieje nieskończony ciąg bez repetycji anagramowych zbudowany z czterech liter?*

Można sprawdzić, że najdłuższy ciąg bez repetycji anagramowych utworzony z trzech liter ma długość dwanaście. Udowodniono natomiast, że trzy litery wystarczą do konstrukcji nieskończonego ciągu bez trzykrotnych repetycji anagramowych, a także że istnieją nieskończone ciągi bez czterokrotnych repetycji anagramowych zbudowane tylko z dwóch liter.

Pytanie Erdősa pozostawało bez odpowiedzi przez wiele lat, aż w końcu i ono znalazło pozytywne rozstrzygnięcie. Konstrukcję odpowiedniego ciągu podał Veikko Käräinen w roku 1992. Jest ona podobna w duchu do konstrukcji Thuego, lecz bardziej skomplikowana technicznie (nie obyło się raczej bez użycia komputera). Właściwie ciąg Käräenena również można zinterpretować jako paradiddle, tym razem angażujące obie ręce i obie nogi perkusistki:

$K = \text{SPSHSLSHSPHSHLHPLPSPLPHLPLSLHLSLPSLSHSPSLPLH} \dots$

Litera H oznacza hi-hat – instrument perkusyjny składający się z dwóch talerzy zamocowanych poziomo na statywie, które uderzają o siebie niczym klaszczące dłonie na skutek przyciskania lewą stopą pedału w statywie. Jeżeli poprzednie paradiddle T i N były wielce „niepowtarzalne”, to co powiedzieć o tym? W ciągu K każde dwa sąsiadujące segmenty są nie tylko różne, ale pozostają różne nawet po dowolnym przestawieniu wyrazów w jednym z nich...

Gdyby w roli liter obsadzić liczby pierwsze, to w ciągu mającym własność Erdősa iloczyn wyrazów dwóch sąsiednich segmentów nigdy nie będą równe. Nie oznacza to jednak, że iloczyn liczb w żadnym segmencie nie będzie kwadratem. Można wykazać, że każdy dostatecznie długi ciąg zbudowany ze skończonej liczby liter-liczb zawiera segment o kwadratowym iloczynie wyrazów. Natomiast w ciągu liczb naturalnych, $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$, nie ma żadnego segmentu (długości co najmniej dwa), którego iloczyn wyrazów jest kwadratem, sześcianem czy też jakąkolwiek wyższą potęgą.

Natomiast ciągle bez odpowiedzi pozostaje poniższe pytanie.

Problem 2. Niech dany będzie nieskończony ciąg zbiorów czteroelementowych $A_1, A_2, A_3, \dots$. Czy z każdego z nich można wybrać element $a_i \in A_i$ tak, aby nieskończony ciąg $a_1 a_2 a_3 \dots$ nie zawierał żadnych repetycji anagramowych?

Tym razem nie wiadomo, czy odpowiedź jest pozytywna, nawet jeżeli powiększymy rozmiar zbiorów A_i do dowolnej skończonej stałej k .

Repetycje sumacyjne

Ciąg liczbowy nazywamy *repetycją sumacyjną*, jeżeli jest sklejeniem dwóch ciągów o równej liczbie wyrazów i równych sumach. Na przykład ciąg 124232 nie jest repetycją zwykłą ani repetycją anagramową, ale jest repetycją sumacyjną. Repetycje sumacyjne wielokrotnie definiujemy podobnie jak poprzednio.

Problem 3. Czy dla jakiejś liczby naturalnej k istnieje nieskończony ciąg bez repetycji sumacyjnych o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, k\}$?

Zauważmy, że ciąg o wyrazach $\{0, 1\}$ jest repetycją sumacyjną wtedy i tylko wtedy, gdy jest repetycją anagramową. Wiemy zatem, że istnieje nieskończony ciąg binarny bez repetycji sumacyjnych czterokrotnych. Udowodniono także, że istnieje nieskończony ciąg bez trzykrotnych repetycji sumacyjnych o wyrazach $\{0, 1, 5\}$.

Repetycje na grafach

Ciąg wierzchołków $v_1 v_2 \dots v_k$ grafu G nazywamy *ścieżką*, jeżeli żadne dwa jego wyrazy nie są identyczne, a każde dwa kolejne wyrazy są połączone krawędzią. Kolorowanie wierzchołków grafu G nazywamy *niepowtarzalnym*, jeżeli ciąg kolorów na żadnej ścieżce nie zawiera repetycji. Najmniejszą liczbę kolorów potrzebnych do niepowtarzalnego pokolorowania grafu G oznaczamy przez $\pi(G)$. Twierdzenie Thuego orzeka na przykład, że $\pi(P) = 3$, gdzie P oznacza dowolną ścieżkę o co najmniej czterech wierzchołkach. Ile kolorów potrzeba do niepowtarzalnego pokolorowania grafów planarnych?

Problem 4. Ile wynosi minimalne k takie, że nierówność $\pi(G) \leq k$ zachodzi dla każdego grafu planarnego G ?

Problem ten został postawiony dwadzieścia pięć lat temu. Przez dwadzieścia lat nie było nawet wiadomo, czy odpowiedź jest liczbą skończoną. Przełom nastąpił pięć lat temu, kiedy to udowodniono, że każdy graf planarny spełnia nierówność $\pi(G) \leq 768$. Z pewnością nie jest to optymalne oszacowanie.

Dowód tego, że liczba $\pi(G)$ ma skończone ograniczenie w klasie grafów planarnych, jest dość prostą konsekwencją zaskakującej strukturalnej własności, pozwalającej zanurzać je w produkty znacznie prostszych grafów, podobnych do drzew. Te prostsze grafy dają się już względnie łatwo kolorować w stylu Thuego. Ostateczne kolorowanie dostajemy zatem jako „produkt” niepowtarzalnych kolorowań prostszych składników. Stąd ograniczenie na liczbę kolorów $768 = 3 \cdot 4 \cdot 64$. Więcej szczegółów można znaleźć w artykule: doi.org/10.19086/aic.12100.

Łamanie rytmu na grafie

Niech k będzie liczbą naturalną i niech $\pi_k(G)$ oznacza najmniejszą liczbę kolorów w kolorowaniu wierzchołków grafu G bez k -krotnych repetycji na ścieżkach. Oczywiście $\pi_2(G)$ to ten sam parametr co $\pi(G)$. Twierdzenie Thuego orzeka zaś, że $\pi_3(P) = 2$ dla dowolnej ścieżki P o co najmniej trzech wierzchołkach.

Hipoteza. Każdy graf planarny G spełnia nierówność $\pi_{2025}(G) \leq 4$.

Jeżeli to prawda, to każdy graf planarny można tak pokolorować czterema kolorami, że wędrując wzdłuż dowolnej ścieżki, być może natrafimy na 2024 identyczne segmenty z rzędu, ale na pewno nie na 2025. Jest to nieco łagodniejsza wersja hipotezy z roku 2000, która postulowała silniejszą nierówność $\pi_{2000}(G) \leq 4$. W przyszłym roku, a także prawdopodobnie w wielu kolejnych latach, ulegnie ona kolejnym osłabieniom. Obecnie nie wiadomo nawet, czy ma szansę być kiedykolwiek prawdziwa, to znaczy, czy nierówność $\pi_k(G) \leq 4$ może zachodzić, przy pewnym skończonym k , dla wszystkich grafów planarnych G . Być może liczba 4

w tej nierówności jest zbyt mała, wiadomo jednak, że nie można jej już obniżyć, istnieją bowiem grafy planarne, w których pojawiają się dowolnie długie jednobarwne ścieżki przy dowolnych kolorowaniach trzema kolorami. Jeżeli cztery kolory nie wystarczą do uniknięcia repetycji o dowolnie dużej krotności na grafach planarnych, to może trzeba użyć w tym celu pięciu, sześciu, trzynastu albo sześciuset sześćdziesięciu sześciu kolorów...? Dla pewnej liczby $r \leq 768$ hipoteza musi być prawdziwa przy być może gigantycznym, ale skończonym k . Chciałoby się poznać najmniejsze takie r , a zaraz potem najmniejsze takie k , chociaż właściwie nie wiadomo po co...



Kąt Otwarty 3°: Nonszalanckie słowotwórstwo

Bartłomiej PAWLIK

Politechnika Śląska

Skończony ciąg elementów danego zbioru Σ nazywamy *słowem nad alfabetem* Σ . O ile nie prowadzi to do niejednoznaczności, słowo zapisujemy jako konkatenację elementów zbioru Σ . Na przykład słowo $(s, \mathfrak{x}, o, w, o)$ nad alfabetem $\Sigma = \{\mathfrak{x}, o, s, w\}$ można zapisać jako **słowo**.

Rozszerzeniem słowa PS jest słowo PxS , gdzie x jest literą (każde ze słów P, S może być słowem pustym). Przykładowym rozszerzeniem słowa **bak** jest **bark**, a rozszerzeniem słowa **bark** jest **barek**.

Niech X będzie słowem niepustym. Słowo postaci XX (np. **kuskus**) nazywamy *kwadratem*. Mówimy, że słowo $PXXS$ zawiera kwadrat XX , natomiast *słowem bezkwadratowym* jest takie, które nie zawiera żadnego kwadratu. Zatem **matematyka** jest słowem bezkwadratowym, a **filologia** nim nie jest (zawiera kwadrat **lolo**).

Dany jest alfabet Σ (zakładamy, że jest *uporządkowany*, czyli litery mają – jak to w alfabecie – pewną kolejność). Rozważmy następującą *procedurę nonszalancką*: Zaczynamy od słowa pustego $W_0 = \varepsilon$. W n -tym kroku procedury tworzymy rozszerzenie W_n poprzedniego słowa W_{n-1} w następujący sposób: na końcu słowa W_{n-1} wstawiamy możliwie najmniejszą literę x taką, że otrzymane słowo $W_n = W_{n-1}x$ jest bezkwadratowe. Jeżeli nie jest to możliwe, to próbujemy wstawić jak najmniejszą literę tuż przed ostatnią literą naszego słowa. Jeżeli to też jest niemożliwe, to próbujemy wstawić jak najmniejszą literę przed ostatnimi dwiema literami itd. Reasumując, w każdym kroku staramy się najdalej, jak tylko można, wstawić jak najmniejszą literę, by uzyskać słowo bezkwadratowe.

Zauważmy, że nad alfabetem $\{a, b\}$ procedura kończy się szybko:

$$\varepsilon \rightarrow \underline{a} \rightarrow \underline{ab} \rightarrow \underline{aba}.$$

Każde rozszerzenie słowa **aba** zawiera kwadrat, więc nie sposób otrzymać kolejnego rozszerzenia.

Co się stanie, gdy zwiększymy alfabet? Dla alfabetu ternarnego $\{a, b, c\}$ początkowych kilka słów to

$$\begin{aligned} \varepsilon &\rightarrow \underline{a} \rightarrow \underline{ab} \rightarrow \underline{aba} \rightarrow \underline{abac} \rightarrow \underline{abaca} \rightarrow \underline{abacab} \rightarrow \underline{abacaba} \rightarrow \\ &\rightarrow \underline{abacabca} \rightarrow \underline{abacabcac} \rightarrow \underline{abacabcacb} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Czy i w tym przypadku procedura dobiega końca po skończonej liczbie kroków?

Nie wiadomo. Teoretycznie nie można tego wykluczyć, ponieważ wiemy, że nad alfabetem ternarnym istnieje nieskończenie wiele słów, których każde rozszerzenie zawiera kwadrat. Obecnie wiemy również, że nie ma ani jednego słowa o tej własności nad alfabetem 17-elementowym (więc nad takim alfabetem procedura nonszalancka nigdy się nie zakończy).

A czy istnieją słowa, których każde rozszerzenie zawiera kwadrat w przypadku alfabetów mocy od 4 do 16? Jak powyżej – **nie wiadomo**.

