



Archipelag możliwości

O powstaniu Wydziału Matematyki i Nauk Informatycznych (MiNI)
Politechniki Warszawskiej

Tadeusz RZEŻUCHOWSKI*

Pierwszy dziekan Wydziału MiNI PW, w latach 1999–2003

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej powstał w roku 1999, na bazie istniejącego wcześniej Instytutu Matematyki. Związane były z tym nadzieje na rozwój oraz nowe możliwości. Z perspektywy 25 lat można stwierdzić, że nie tylko zostały one spełnione, ale też przekroczone. Duża intensyfikacja i wzrost poziomu badań naukowych, nowe, atrakcyjne kierunki i specjalności studiów, wysoka ocena absolwentów przez pracodawców – to w największym skrócie bilans tych 25 lat.

Wydział od początku starał się wyjść z działaniem poza swoje mury, zwłaszcza do uczniów szkół średnich i starszych klas podstawowych, traktując to jako ważną część misji.

Od roku 2000 Wydział prowadzi Internetowy Konkurs Matematyczny, skierowany szczególnie do uczniów z małych miejscowości. Główna idea to motywowanie młodzieży do robienia jak największej liczby zadań. Wiadomo, że z matematyką jest trochę jak z tańcem – nie wystarczy znać kroki i figury – trzeba dużo ćwiczyć. Dobrze skonfigurowany zbiór zadań większości uczniów powinien wystarczyć. Konkurs nie był pomyślany jako konkurencja dla Olimpiady, gdzie zadania są dużo bardziej wyrafinowane. Tu wystarczy solidne przygotowanie z materiału szkoły średniej.

Również w roku 2000 Wydział zaczął realizować działania pod nazwą „Zielona Informatyka”, później „Zielona Akcja”. W czasie wakacji studenci

wolontariusze jechali prowadzić zajęcia i realizować projekty edukacyjne z dziećmi w wiejskich szkołach. Chodziło nie tylko o nauczanie dzieci czegoś konkretnego, ale również o zmniejszenie dystansu, o przekonanie ich, że dalsza edukacja i związany z tym awans są w ich zasięgu. Po kilku latach akcję przejęła Polsko-Amerykańska Fundacja Wolności i pod nazwą „Projektor” prowadzi ją na ogromną skalę do tej pory.

Inny charakter miał realizowany w latach 2010–2012 projekt o nazwie „Archipelag Matematyki”. Tworzony był wirtualny świat, po którym wędrując i rozwiązując pojawiające się zagadki o charakterze matematycznym, uczestnik uzyskiwał dostęp do stworzonych w ramach projektu materiałów zawierających różne ciekawostki matematyczne, problemy i zastosowania. W Archipelagu powstało ponad 300 filmów, animacji czy gier matematycznych i innych materiałów edukacyjnych.

Takich działań na Wydziale jest dużo więcej: MiNI Akademia Matematyki, Dzień Popularyzacji Matematyki... to tylko niektóre przykłady.

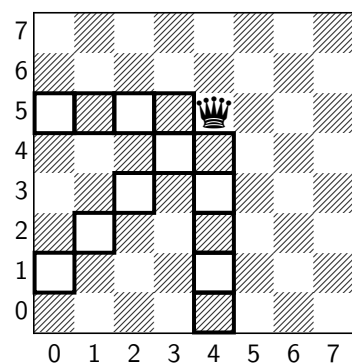
Metafora Archipelagu dobrze pasuje do samej Matematyki – to aktywny sejsmicznie obszar, gdzie powstają wciąż nowe wyspy, między którymi zachodzi intensywny przepływ informacji i współpraca, i które pełne są zasobów wykorzystywanych nawet w odległych akwenach.

Życzę Czytelnikom *Delty* fascynujących podróży po tym Archipelagu.

Wythoff Nim, czyli krótkie warsztaty z kombinatorycznej teorii gier

Rafał GÓRAK*

* Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska



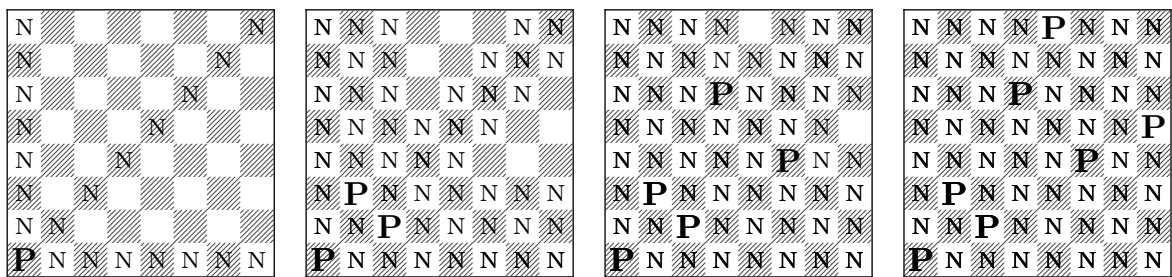
Rys. 1. Dostępne ruchy

W pewnym miejscu na skończonej szachownicy ustawiono hetmana. Dwóch graczy wykonuje nim ruchy naprzemiennie, a grę przegrywa ten z graczy, który ruchu nie może wykonać (a jest jego kolej). Jednak aby mieć pewność, że gra kiedyś się skończy, dopuszczamy jedynie ruchy w lewo, w dół oraz po jednej z przekątnych (tyle samo pól w lewo co w dół). Gra ta nosi nazwę Wythoff Nim, od nazwiska holenderskiego matematyka Willema Abrahama Wythoffa, który na początku dwudziestego wieku ją zaproponował i badał. Gra ta jest przykładem szerszej klasy gier kombinatorycznych, tzw. gier bezstronnych (*impartial*). Są to gry, w których gracze wykonują ruchy naprzemiennie, dostępne ruchy zależą jedynie od kolejności graczy, a przegrywa ten, który ruchu nie może wykonać – tak jak w Wythoff Nim. Co więcej, zakładamy, że niezależnie od przebiegu gry kończą się w pozycji terminalnej (nie ma remisów), a liczba wszystkich możliwych pozycji jest skończona (w skrócie: gra jest skończona). Zatem jeżeli będziemy w dalszej części używali terminu gra, to właśnie takie gry będziemy mieli na myśli. Naszym celem jest oczywiście ustalenie strategii wygrywającej.

Aby tego dokonać, podzielimy pozycje (czyli pola szachownicy) na dwa rodzaje. Pozycje **P**, czyli pożądate, oraz pozycje **N**, czyli niepożądate. Celem każdego gracza będzie wykonanie ruchu na pozycje pożądate, czyli zwycięskie, a unikanie pól niepożyczanych. Precyzyjna definicja wygląda następująco:

Definicja. Pozycja terminalna w grze to pozycja **P** (w przypadku Wythoff Nim lewy dolny róg). Z pozycji **P** możliwe są jedynie ruchy do pozycji **N**, a z pozycji **N** istnieje ruch do pozycji **P**.

Chwila refleksji pozwala nam stwierdzić, że taki podział umożliwia jednemu z graczy rozegrać zwycięską partię. Dokładniej, gracz, który wykonuje ruch z pozycji **N**, ma zwycięską strategię, wykonując ruch do **P**. Z kolei ruszając się z **P**, nigdy do pozycji **P** nie trafimy, czyli w szczególności do lewego dolnego rogu – jedynej pozycji terminalnej. Zatem gracz wykonujący ruch z pozycji **P** nie ma strategii wygrywającej. Co więcej, przytoczona tutaj definicja w istocie pokazuje, jak rekurencyjnie (i jednoznacznie) podzielić pozycje na **N** i **P**. Zróbmy to w sytuacji gry Wythoff Nim na standardowej szachownicy 8 na 8. Podziału można dokonać w kilku prostych krokach, zaczynając od pozycji terminalnej, jak ukazane jest to na rysunku 2.



Rys. 2. Rekurencyjny podział na pozycje **P** i **N**

Jak widać na rysunku 2, pozycje pożądate **P** są znacznie rzadsze niż pozycje **N**. Ostatnia szachownica na powyższym rysunku daje nam pełen opis strategii w grze na szachownicy 8 na 8.

- Jeżeli na początku gry hetman jest ustawiony na pozycji **P**, to pierwszy z graczy przegrywa.
- Jeżeli zaś na początku gry hetman jest ustawiony na pozycji **N**, to pierwszy z graczy przesuwa go na pozycję **P**, i tak za każdym razem, kiedy jest jego kolej. Postępując w ten sposób, gwarantuje sobie wygraną.

Jeżeli kolumny i wiersze będziemy numerować, poczynając od 0, to przy pewnym niewielkim wysiłku (co pozostawiamy Czytelnikowi) można wykazać, że pozycje **P** są postaci $(a_n, a_n + n)$ bądź symetrycznie $(a_n + n, a_n)$, gdzie a_n to ciąg spełniający następujący wzór rekurencyjny:

$$a_0 = 0 \text{ oraz } a_n = \text{mex}\{a_i, a_i + i \mid 0 \leq i < n\},$$

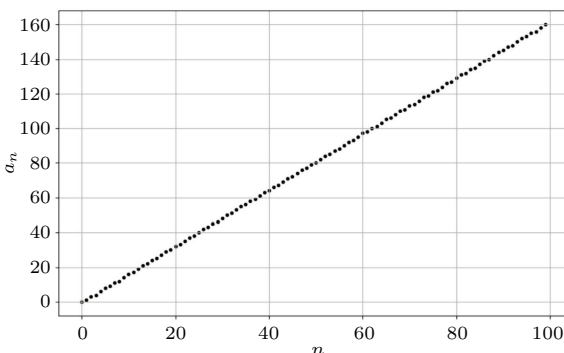
w którym $\text{mex}(A) = \min(\mathbb{N} \cup \{0\} \setminus A)$. Przyjrzyjmy się wykresowi a_n dla pierwszych 100 wartości.

Widać, że wartości a_n rosną w sposób prawie liniowy. Dokładniejszy rachunek pokazuje, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \approx 1,61803$.

Nietrudno rozpoznać, że jest to $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, czyli tzw. złoty podział. Można wykazać, że $a_n = \lfloor n\varphi \rfloor$, uzyskując rozwiązanie nierekurencyjne Wythoff Nim:

Twierdzenie 1. W grze Wythoff Nim gracz drugi ma strategię wygrywającą, jeśli pozycja początkowa jest planszą z hetmanem na pozycji $(\lfloor n\varphi \rfloor, \lfloor n\varphi \rfloor + n)$ lub $(\lfloor n\varphi \rfloor + n, \lfloor n\varphi \rfloor)$, dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. W przeciwnym wypadku gracz pierwszy ma strategię wygrywającą (zwycięski ruch prowadzi na pozycję przedstawioną wcześniej postaci).

Zastanówmy się teraz, co wydarzy się, gdy na planszy rozstawionych zostanie kilka hetmanów, a gracze w swojej turze mogą poruszyć tylko jednego z nich.



Rys. 3. Wykres a_n dla $n \leq 100$

Zdefiniujmy następujące zbiory:
 $A = \{\lfloor n\varphi \rfloor : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ oraz
 $B = \{\lfloor n\varphi \rfloor + n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Pokaż, że
 $A \cap B = \{0\}$ oraz $A \cup B = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
 Korzystając z tego faktu, udowodnij twierdzenie 1.

7	7	8	6	9	0	1	4	5
6	6	7	8	1	9	10	1	4
5	5	3	4	0	6	8	10	1
4	4	5	3	2	7	6	9	0
3	3	4	5	6	2	0	1	9
2	2	0	1	5	3	4	8	6
1	1	2	0	4	5	3	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

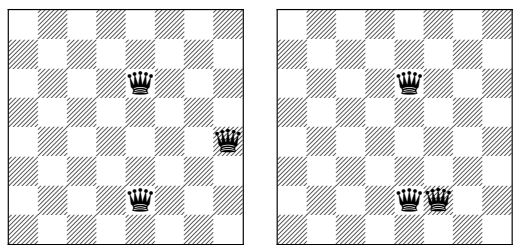
Rys. 4. $g(5, 6) = \text{mex}\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\} = 6$

Dla dwóch liczb a, b całkowitych nieujemnych definiujemy sumę Nim $a \oplus b$ jako xor ich rozwinięć binarnych, wyrażony na powrót w systemie dziesiętnym. Przykładowo, chcąc policzyć $29 \oplus 11$, najpierw reprezentujemy liczby w systemie dwójkowym, czyli $29 = 11101_2$ oraz $11 = 1011_2$, następnie

$$\begin{array}{r} 11101_2 \\ \text{xor } 1011_2 \\ \hline 10110_2 \end{array}$$

Ponieważ $10110_2 = 22$, więc możemy zapisać, że $29 \oplus 11 = 22$.

Sformułowanie twierdzenia Sprague'a–Grundy'ego w pełnej ogólności wymaga wprowadzenia pojęcia sumy gier. Suma gier kombinatorycznych $G + H$ to nowa gra, gdzie gracze w każdej turze wykonują ruch tylko w jednej z nich. Grę przegrywa ten gracz, który nie może wykonać ruchu. W istocie opisana wersja gry Wythoff Nim z wieloma hetmanami jest sumą gier Wythoff Nim z jednym hetmanem. Gdy mamy do czynienia z grami bezstronnymi, skończonymi i bez remisów, gdzie ostatni wykonujący ruch wygrywa, przyjmujemy wartość S-G dla każdej pozycji x w G , y w H oraz dla (x, y) , która jest pozycją w $G + H$, jako odpowiednio $g(x)$, $g(y)$ i $g(x, y)$. Wtedy $g(x, y) = g(x) \oplus g(y)$. Oczywiście twierdzenie zachodzi również dla sumy większej liczby gier.



Rys. 5. Zwycięski ruch z pozycji N na pozycję P

Dopuszczamy możliwość, że na jednym polu stoi wiele hetmanów. Gra kończy się, gdy nie można poruszyć żadnego z nich. Do tej pory pozycję w grze mogliśmy utożsamiać z polem, na którym stoi hetman. Natomiast jeśli na planszy jest ich więcej, to mówiąc „pozycja”, mamy na myśli całą planszę z zadaniem układem. Dla rozróżnienia polem **P** będziemy nazywać takie pole szachownicy, że po ustawieniu tam jednego hetmana odpowiadająca pozycja (w grze z jednym hetmanem) jest pozycją **P**. Analogicznie definiujemy pole **N**. Podziału na pola **P** i **N** dokonaliśmy w pierwszej części artykułu. W pewnych sytuacjach strategia wygrywająca jest łatwa do przewidzenia:

- Gdy wszystkie hetmany, poza jednym, ustawione są na polu **P**, to zwycięża gracz wykonujący ruch, mianowicie: przesuując hetmana z pola **N** na pole **P**.
- W grze z dwoma hetmanami, jeżeli ustawione są na tym samym polu (lub polach symetrycznych), to drugi z graczy ma strategię zwycięską: wystarczy, że będzie kopiował ruchy przeciwnika.

W pełnej ogólności sam podział na pola **P** i **N** nie wystarczy. Wtedy w sukurs przychodzi pojęcie wartości Sprague'a–Grundy'ego (w skrócie S-G). Dokładniej, wartość S-G $g(x)$ dla pozycji x w grze z jednym hetmanem definiujemy rekurencyjnie: $g(t) = 0$ dla dowolnej pozycji terminalnej, $g(x) = \text{mex}\{g(y) \mid \text{z } x \text{ istnieje ruch do pozycji } y\}$. Postępując podobnie jak z wyznaczaniem pozycji **P** i **N**, otrzymujemy wartości S-G dla pozycji w grze z jednym hetmanem, co ilustruje rysunek 4.

Obserwacja. Wartość S-G pozycji wynosi 0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest to pozycja **P**.

Obserwację tę nietrudno udowodnić, i to nie tylko dla Wythoff Nim, ale dla wszystkich gier kombinatorycznych bezstronnych, skończonych i bez remisów. Zatem wartości S-G niosą więcej informacji niż tylko podział na pozycje **P** i **N**. Zachodzi bowiem znane klasyczne twierdzenie Sprague'a–Grundy'ego, które w wersji dla gry Wythoff Nim formułuje się następująco:

Twierdzenie 2. Jeżeli n hetmanów zostało ustawionych na polach $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, to wartość S-G tej pozycji jest równa $g(a_1, b_1) \oplus g(a_2, b_2) \oplus \dots \oplus g(a_n, b_n)$, gdzie $g(a_i, b_i)$ to wartość S-G pozycji z pojedynczym hetmanem na planszy, na polu o współrzędnych (a_i, b_i) . W szczególności grę wygrywa gracz drugi wtedy i tylko wtedy, gdy wartość S-G (czyli wspomniana suma) wynosi 0.

Przykładowo na rysunku 5 mamy hetmany ustawione na pozycjach o wartościach S-G 6, 9 i 5 (lewa szachownica, korzystamy z rys. 4). Ponieważ $6 \oplus 9 \oplus 5 = 10$, jest to pozycja **N**. Rzeczywiście, jeśli przesunąć hetmana z pozycji o współrzędnych (7, 3) na pozycję (5, 1), hetmany stałyby na polach o wartościach S-G 6, 3, 5. Skoro $6 \oplus 3 \oplus 5 = 0$, z twierdzenia 2 otrzymujemy, że prawa szachownica to pozycja **P**.

Okazuje się, że wyznaczenie wzoru nierekurencyjnego wartości Sprague'a–Grundy'ego dla gry Wythoff Nim jest problemem otwartym. Podkreśmy, że opisaną tutaj technikę można zastosować jedynie w grach kombinatorycznych, bezstronnych i skończonych.

Gdybyśmy jednak dopuścili dwa rodzaje hetmanów, czarnych i białych, a każdemu z graczy pozwolili poruszać jedynie hetmanami w swoim kolorze, to taka gra nie byłaby bezstronna i do jej analizy potrzebne byłyby inne narzędzia. Podobnie zmiana warunku zwycięstwa na odwrotny, czyli na zwycięstwo gracza pozbawionego ruchu, zazwyczaj dużo bardziej komplikuje analizę gier bezstronnych. Zachęcamy Czytelnika do dalszych dociekań.

Zadanie. Na trzech stołach rozrzucona została pewna ilość monet. Dwóch graczy może naprzemiennie zabierać 1, 2 lub 3 monety, ale tylko z jednego, wybranego przez siebie stołu. Oczywiście wyboru stołu gracze mogą dokonywać za każdym razem, gdy wykonują swój ruch. Opisz pozycje pożądaną **P** oraz niepożądaną **N**. Wskaż zwycięski ruch z pozycji, gdzie na stołach mamy odpowiednio 61, 101 i 15 monet.

Zadanie. Rozważ grę Wythoff Nim z jednym hetmanem z odwrotnym warunkiem zwycięstwa. Rozwiąż ją dla szachownicy 8 na 8.