



Zachłanność czasem popłaca

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Algorytm zachłanny to taki, który dokonuje wyborów, jakie w aktualnej chwili (*lokalnie*) wydają się najlepsze, natomiast nie jest jasne, czy są one słuszne w sensie *globalnym*, gdy szukamy rozwiązania optymalnego. Choć nie jest to regułą, to niektóre algorytmy zachłanne dają optymalne rozwiązania, i o tym będzie w tym kąciku.

Przykład 1. Mamy banknoty o nominałach 10^k , $2 \cdot 10^k$ i $5 \cdot 10^k$ pengő dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Chcemy wypłacić nimi n pengő dla pewnej liczby naturalnej n . Robimy to w ten sposób, że za każdym razem, gdy zostało jeszcze do wypłacenia m pengő, wybieramy banknot z największym nominałem nieprzekraczającym m .

Przykład 2. Chcemy dojechać z miasta A do miasta B . Nawigacja prowadzi nas według następującej reguły: udaj się do miasta najbliższego aktualnej pozycji, spośród tych, w których jeszcze nie byłeś.

Pozostawiam Czytelnikowi uzasadnienie, że algorytm przedstawiony w pierwszym przykładzie daje optymalne rozwiązanie ze względu na liczbę wykorzystanych banknotów, a algorytm z przykładu drugiego nie jest optymalny ze względu na przebyty dystans.

Zadania

1. Dla danego wielokąta W niech $s(W)$ oznacza sumę kwadratów długości jego boków. Udowodnić, że jeśli W jest wielokątem wypukłym, to można wskazać takie trzy jego wierzchołki A, B, C , że $s(\triangle ABC) \geq s(W)$. (XI Wielkopolska Liga Matematyczna)
2. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$ oraz ciąg $n - 1$ znaków mniejszości i większości. Wykazać, że liczby $1, 2, \dots, n$ można tak wstawić między znaki, aby wszystkie nierówności były spełnione (na przykład dla $n = 5$ i ciągu znaków $(<, >, >, <)$ mamy $4 < 5 > 2 > 1 < 3$). (III WLM)
3. Liczby naturalne $k, n \geq 2$ spełniają warunek $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < k$. Dowieść, że zbiór $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\}$ można podzielić na k podzbiorów, z których każdy ma sumę elementów nie większą niż 1.
4. Zbiór nazywamy *wolnym od sum*, jeśli każde dwa jego różne podzbiory mają różne sumy elementów. Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że zbiór o więcej niż 3^k elementach ma $(k + 1)$ -elementowy podzbiór wolny od sum. (LXII OM)
5. Wyznaczyć najmniejszą stałą c o następującej własności: Dla każdego całkowitego dodatniego n w sumie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ można zmienić część znaków $+$ na $-$ w taki sposób, by otrzymać wyrażenie o wartości bezwzględnej nieprzekraczającej $\frac{c}{n^2}$. (XV WLM)
6. Rozstrzygnąć, czy w kole można zmieścić nieskończony zbiór parami rozłącznych kół, które mają nieskończoną sumę obwodów.

Problem otwarty

7. Czy w zadaniu 3 zawsze możliwy jest podział na $k - 1$ podzbiorów?

4. Przypuśćmy, że mamy zbiór $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ wolny od sum, i chcemy powiększyć go o nowy element y . Jest to możliwe dokładnie wtedy, gdy dla dowolnych podzbiorów $A, B \subseteq X$ zachodzi $y \neq \sum_{a \in A} a - \sum_{b \in B} b = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i$, przy czym $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$. To oznacza, że co najwyżej 3^k liczb może zaszkodzić zbiorowi X .

5. Szukaną stałą jest $c = \frac{12}{35}$ i jest ona osiągnięta dla $n = 5$. Niech S_n będzie najmniejszą możliwą wartością bezwzględną utworzonego wyrażenia. Można wykazać indukcyjnie, że dla $n \geq 7$ zachodzi nierówność $S_n < \frac{n}{3}$. Krok indukcyjny z n do $n + 2$ otrzymujemy przez dodanie $\pm \frac{n+1}{1} \pm \frac{n+2}{2}$, w zależności od znaku.

6. Zachodzi $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$. Kół o promieniach $\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k+1}}, \dots, \frac{1}{2^{k+1}-1}$ można zmieścić w wymiarach $\frac{2^k-1}{2^k} \times 2$.

1. Wybieramy trzy kolejne wierzchołki X, Y, Z – tak by $|\angle XYZ| \geq 90^\circ$ (jest to możliwe, gdy wielokąt ma co najmniej cztery boki). Jeśli W' jest wielokątem powstałym z W przez zastąpienie boków XY i YZ bokiem XZ , to $s(W') \geq s(W)$.

2. Postawmy 1 na pierwszym miejscu, a dalej będziemy dobierać liczby całkowite (niekoniecznie dodatnie) tak, by nierówności były zachowane; dla „ $>$ ” największą możliwą, a dla „ $<$ ” – najmniejszą. Otrzymamy n kolejnych liczb całkowitych, które trzeba będzie jeszcze tylko powiększyć o pewną stałą.

3. Wystarczy umieścić $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ w osobnych podzbiorach, a każdy kolejny element zbioru $\{\frac{1}{k+2}, \dots, \frac{1}{n}\}$ dodawać do któregośkolwiek z tych k podzbiorów – można wykazać, na przykład metodą nie wprost, że zawsze się do jakiegoś „zmieści”.

Wskazówki do zadań