

Porównując niektóre własności średniej arytmetycznej i średniej kołowej, warto przywołać pewną cechę, dzięki której średnia arytmetyczna jest postrzegana jako wielkość dobrze reprezentująca dany zbiór obserwacji na prostej. Otóż, jak wiadomo, średnia arytmetyczna minimalizuje sumę kwadratów różnic od poszczególnych obserwacji. W prosty sposób wynika to z następującej tożsamości:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - a)^2, \text{ gdzie } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

której weryfikację pozostawiamy Czytelnikom. Czy tego typu związek istnieje dla danych kierunkowych i średniej kołowej? Okazuje się, że tak, tyle że kwadrat odległości euklidesowej trzeba zastąpić przez tzw.

odległość kosinusową, daną wzorem $d(\alpha, \beta) = 1 - \cos(\alpha - \beta)$.

Odległość kosinusowa $d(\alpha, \beta)$ przyjmuje najmniejszą wartość równą 0 tylko, jeśli $\alpha = \beta$. Należy jednak zaznaczyć, że odległość kosinusowa nie spełnia nierówności trójkąta, nie jest zatem odległością w ogólnym, matematycznym rozumieniu.

Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Niech $\bar{\alpha}$ będzie średnią kołową wyznaczoną na podstawie obserwacji kierunkowych danych kątami $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Wówczas

$$\bar{\alpha} = \arg \min_{\beta \in [0, 2\pi)} \sum_{i=1}^n [1 - \cos(\alpha_i - \beta)].$$

Uzasadnienie, wykorzystujące równość $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ oraz podstawowy rachunek różniczkowy, ponownie pozostawiamy Czytelnikom.

Do tej pory koncentrowaliśmy się na średniej kołowej, czyli kierunku wektora średniego $(\bar{x}, \bar{y})$. Rozważmy teraz jego długość $R = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$. Okazuje się, że ma ona ciekawą interpretację, stanowiąc przydatny miernik

skoncentrowania danych wokół średniej kątowej. Jak już zauważyliśmy, w przypadku danych rozłożonych równomiernie na okręgu mamy $R = 0$, co nie dziwi, gdyż w tym przypadku nie istnieje średnia kołowa, a więc trudno byłoby oczekiwać skoncentrowania obserwacji wokół tej średniej. Z kolei dla zbioru identycznych wartości otrzymujemy $R = 1$, czyli maksymalną możliwą wartość tego parametru, co również nie dziwi, bowiem wszystkie obserwacje są równe średniej kołowej. Dla przypadków pośrednich między całkowitą koncentracją wokół średniej kołowej a brakiem owej koncentracji wielkość R przyjmuje wartości z przedziału $(0, 1)$. Przykładowo, dla danych z przykładu 1 mamy $R = 0,9848$, co potwierdza ich duże skoncentrowanie wokół kierunku średniego, zaś dla obserwacji z przykładu 2 otrzymujemy $R = 0,0875$, co oznacza bardzo małą koncentrację wokół średniej kołowej.

W analizie danych kierunkowych wykorzystuje się również wielkość

$$V = 1 - R,$$

będącą miarą rozrzutu, która jest traktowana jako odpowiednik wariancji próbkowej i bywa nazywana **wariancją kołową**. W przeciwieństwie do klasycznej wariancji próbkowej V jest miarą *unormowaną*, tzn. taką, której największa możliwa wartość to 1, przy czym wartości V bliskie zeru oznaczają małe rozproszenie, podczas gdy wartości bliskie 1 świadczą o dużym rozrzucie obserwacji.

Na zakończenie dodajmy, że poruszone w niniejszym artykule zagadnienia dotyczą jedynie wstępnego opisu danych kierunkowych, których dalsza i bardziej zaawansowana analiza pozwala wyciągać ogólne wnioski na podstawie dostępnych obserwacji. Ale to jest już materiał na odrębną opowieść.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1816. Czy istnieje taki wielomian P stopnia 2025, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$P(x) + P(1 - x) = 1?$$

M 1817. Wyznaczyć liczbę 2025-cyfrowych liczb podzielnych przez 2^{2025} , których cyfry należą do zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

M 1818. Kwadratową planszę o wymiarach 10×10 podzielono na 25 kwadratów 2×2 . Następnie planszę wypełniono kostkami domina (prostokątami 1×2 ułożonymi pionowo lub poziomo). Jaka jest najmniejsza liczba kostek domina, które mogą znajdować się wewnątrz kwadratów 2×2 z podziału?

Przygotował Andrzej MAJHOFA

F 1119. W szczelnym kontenerze o stałej pojemności (sztywne metalowe ściany) $V = 10 \text{ m}^3$ znajduje się powietrze pod ciśnieniem 1 atmosfery, $p_0 = 101 \cdot 10^3 \text{ Pa}$, w temperaturze $T_0 = 273 \text{ K}$ (0°C). Ile ciepła potrzeba do ogrzania powietrza w kontenerze do temperatury $T = 293 \text{ K}$? Stała gazowa $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

F 1120. Naczynie w kształcie pionowego walca o wewnętrznym promieniu R ma u podstawy kołowy otworek o promieniu r . Jak prędkość wypływu wody z naczynia zależy od wysokości h jej powierzchni nad odpływem (dolnym otworkiem)? Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Rozwiązania na str. 24

Rozwiązania zadań ze strony 7



Rozwiązanie zadania F 1119.

Powietrze jest mieszaniną gazów dwuatomowych: azotu (N_2) i tlenu (O_2). W podanych warunkach oba gazy doskonale spełniają równania gazu doskonałego. Ciśnienie p w kontenerze jest sumą ich ciśnień cząstkowych, a więc spełnione jest równanie:

$$p_0 V = nRT_0,$$

w którym n oznacza sumaryczną liczbę moli azotu i tlenu. Oba gazy mają takie samo molowe ciepło właściwe w przemianie w stałej objętości: $c_V = \frac{5}{2}R$. Podniesienie temperatury gazów w kontenerze do $T = 293$ K wymaga więc dostarczenia ciepła Q równego:

$$Q = nc_V(T - T_0) = \frac{5p_0 V(T - T_0)}{2T_0}.$$

Liczbowo: $Q = 185$ kJ.



Rozwiązanie zadania F 1120.

Woda jest cieczą nieściśliwą, wobec tego prędkość opadania powierzchni wody $v(h)$ i prędkość jej wypływu dolnym otworkiem $v(0)$ związane są warunkiem wynikającym z prawa zachowania masy wody:

$$\pi R^2 v(h) = \pi r^2 v(0).$$

W opisanych warunkach możemy z dobrym przybliżeniem pominąć wpływ lepkości wody i posłużyć się równaniem Bernoulliego:

$$\frac{v(h)^2}{2} + gh + \frac{p(h)}{\rho} = \frac{v(0)^2}{2} + \frac{p(0)}{\rho}.$$

Przyjęliśmy, że h oznacza wysokość nad środkiem otworka, a ρ jest gęstością wody (stałą w całym naczyniu), a $p(h)$ i $p(0)$ oznaczają ciśnienie na zewnątrz naczynia na wysokości h i na poziomie otworka. Podstawiamy związek $v(h)$ i $v := v(0)$ wynikający z równania ciągłości do równania Bernoulliego i otrzymujemy:

$$\frac{p(h) - p(0)}{\rho} + gh = \frac{1}{2}v^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right).$$

Ostatecznie otrzymujemy odpowiedź:

$$v = \sqrt{\frac{2((p(h) - p(0))/\rho + gh)}{1 - r^4/R^4}}.$$

Zwykle różnica ciśnień atmosferycznych na wysokości h jest zaniedbywalnie mała, i można ją pominąć. Stosunek czwartych potęg promieni też zwykle jest bardzo mały, i można go pominąć. Oba te przybliżenia prowadzą do znanego wzoru Torricellego: $v = \sqrt{2gh}$.

Uwaga: otrzymany wzór opisuje prędkość wypływu w środku otworka. W rzeczywistości prędkości wypływu zbiegają się nieco w kierunku środka otworka, co powoduje zmniejszenie strumienia wypływającej wody w stosunku do wartości $\pi r^2 v$ o czynnik $\alpha < 1$ zależny od kształtu otworka – i dla otworka kołowego ten czynnik wynosi $\alpha \approx 0,62$, co należałoby uwzględnić w równaniu ciągłości.



Rozwiązanie zadania M 1816.

Odpowiedź: Tak.

Wielomian

$$P(x) = (1 - x)^{2026} - x^{2026} + \frac{1}{2}$$

spełnia warunki zadania.



Rozwiązanie zadania M 1817.

Udowodnimy przez indukcję, że istnieje dokładnie 3^n liczb n -cyfrowych podzielnych przez 2^n , których cyfry należą do zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Dla $n = 1$ teza jest jasna, w zbiorze $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ są tylko trzy liczby parzyste.

Założmy, że teza jest spełniona dla n . Liczbę spełniającą założenia stwierdzenia nazwijmy *dobrą*. Rozważmy $(n + 1)$ -cyfrową liczbę dobrą i usuńmy jej pierwszą cyfrę. Otrzymana liczba n -cyfrowa jest również dobra, gdyż operacja usunięcia pierwszej cyfry x jest równoważna odjęciu liczby $x \cdot 10^n$, która jest podzielna przez 2^n .

Z drugiej strony, dopisując z lewej strony cyfrę x do dobrej liczby n -cyfrowej $y \cdot 2^n$, dostajemy liczbę

$$y \cdot 2^n + x \cdot 10^n = 2^n(y + x \cdot 5^n).$$

Uzyskana liczba jest $(n + 1)$ -cyfrową liczbą podzielną przez 2^n , której cyfry należą do zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i która jest podzielna przez 2^{n+1} wtedy i tylko wtedy, gdy $x + y$ jest parzyste. Zauważmy jednak, że dla parzystej liczby y jako x możemy przyjąć jedynie 2, 4 lub 6, a dla nieparzystego y jedynie 3, 5 lub 7. Oznacza to, że dobrych liczb $(n + 1)$ -cyfrowych jest dokładnie 3 razy więcej niż dobrych liczb n -cyfrowych.



Rozwiązanie zadania M 1818.

Odpowiedź: 10.

Rozważmy kwadraty $A_1, A_3, \dots, A_9$ o wymiarach, odpowiednio, $1 \times 1, 3 \times 3, \dots, 9 \times 9$, których lewy dolny róg pokrywa się z lewym dolnym rogiem planszy. Dla każdego z kwadratów A_i ($i = 1, 3, 5, \dots, 9$) istnieje kostka domina X_i przecinająca jego bok (ponieważ kwadraty o nieparzystym wymiarze nie mogą zostać wypełnione kostkami domina). Łatwo zauważyć, że X_i leży wówczas wewnątrz kwadratu 2×2 z podziału. Dostaliśmy zatem 5 kostek domina wewnątrz kwadratów 2×2 .

Podobnie, biorąc pod uwagę kwadraty $B_1, B_3, \dots, B_9$ o wymiarach $1 \times 1, 3 \times 3, \dots, 9 \times 9$, których prawy górny róg pokrywa się z prawym górnym rogiem planszy, znajdujemy kolejnych 5 kostek domina Y_j ($j = 1, 3, 5, \dots, 9$) o żądanej własności. Wobec tego najmniejsza możliwa liczba kostek domina spełniających warunki zadania jest nie mniejsza niż 10.

Następujący rysunek pokazuje, że liczbę 10 kostek domina jesteśmy w stanie zrealizować.

