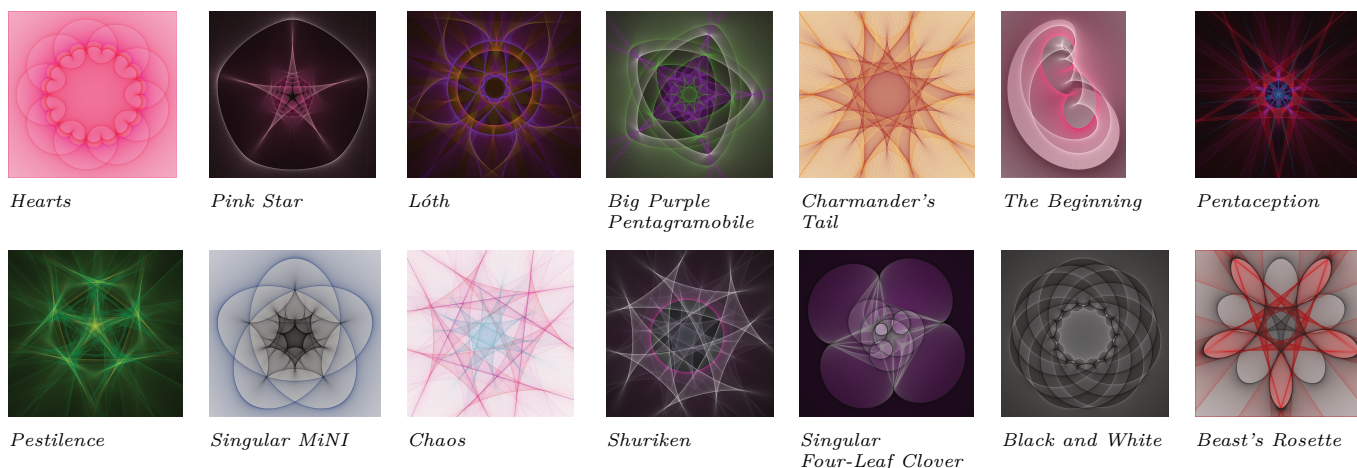




Literatura

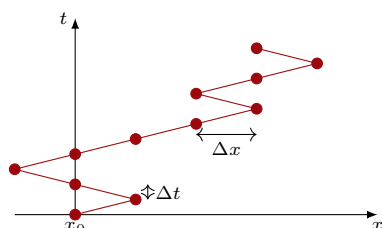
- [1] M.V. Berry, N.L. Balazs, *Evolution of Semiclassical Quantum States in Phase Space*, J. Phys. A Math. Gen. 12 (1979), 625–642
- [2] I. Danielewska, D. Poławski, D. Sterczewska, M. Zwierzyński, *Artistic Aspects of the Wigner Caustic and the Centre Symmetry Set*, arXiv:2409.04443
- [3] S. Janeczko, *Bifurcations of the Center of Symmetry*, Geom. Dedicata 60 (1996), 9–16

opis tworzenia wizualizacji, wraz z przykładowym kodem w programie *Mathematica*, znajduje się w [2]. Na rysunkach powyżej prezentujemy wybrane wizualizacje. Mamy szczerą i serdeczną nadzieję, że te obrazy przypadną do gustu Czytelnikom *Delty* i zainspirują ich do zgłębiania piękna osobliwej geometrii różniczkowej. Być może niektórzy z Państwa skorzystają z przykładowego kodu napisanego w programie *Mathematica*, zamieszczonego w [2], i sami podejmą próbę stworzenia własnych, niezwykłych wizualizacji tych tajemniczych geometrycznych zbiorów, odkrywając jednocześnie magię, jaką jest matematyka.

* Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska



Rys. 1



Rys. 2. Wykres prezentuje położenie cząsteczki (x) w zależności od czasu (t)

O błędzeniu losowym można przeczytać również w tekście Michała Miśkiewicza *Dyskretny wzór Itô z Δ_{23}^{10}* .

Zrozumieć dyfuzję

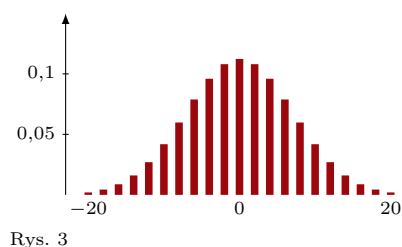
Karolina PAWLAK*

Ostatnio bardzo popularne stały się dyfuzory zapachowe, które potrafią otulić naszą domową przestrzeń przyjemnymi wonnościami i wprawić nas w dobry nastrój. Ale czy zastanawialiście się kiedyś, w jaki sposób dochodzi do rozprzestrzeniania się zapachów w pomieszczeniu? W przypadku dyfuzorów zapachowych nośnikiem zapachu są patyczki ratanowe, zanurzone w szklanym pojemniku wypełnionym olejem eterycznym (rys. 1). Dzięki porowatej strukturze patyczków ciecz jest wchłaniana i przenoszona aż do ich wierzchołków, gdzie olejek zaczyna odparowywać z powierzchni. Następnie cząsteczki substancji zapachowej ulegają niezliczonym zderzeniom z cząsteczkami powietrza. To je napędza i sprawia, że rozpraszają się po pomieszczeniu, a my cieszymy się pięknym aromatem. Opisane zjawisko przemieszczania się substancji z obszaru o wyższym jej stężeniu do obszaru o niższej koncentracji nazywamy **dyfuzją**.

Sprawdźmy, jak rachunek prawdopodobieństwa może nam pomóc dokładniej opisać proces dyfuzji. Wyobraźmy sobie, że mamy cząsteczkę perfum w punkcie x_0 , która porusza się wzdłuż osi OX i w czasie $\Delta t > 0$ przemieszcza się o $\Delta x > 0$ w prawo lub w lewo (rys. 2). Przyjmujemy, że prawdopodobieństwo pójścia w prawo/lewo w każdym kroku wynosi $\frac{1}{2}$. Jeśli n jest liczbą skoków, jakie wykonała cząsteczka, to $n = n_+ + n_-$, gdzie n_+ to liczba skoków w prawo, a n_- to liczba skoków w lewo. Ponadto $t = n\Delta t$ jest całkowitym czasem jej ruchu. Natomiast jeśli przez x oznaczmy przemieszczenie cząsteczki względem punktu x_0 , to liczba $m = \frac{x}{\Delta x}$ wyraża wielkość przemieszczenia w punktach kratowych i oczywiście $m = n_+ - n_-$. Zatem liczby skoków w prawo/lewo możemy wyrazić wzorami:

$$n_- = \frac{n - m}{2}, \quad n_+ = \frac{n + m}{2}.$$

Chcemy obliczyć $P(m, n)$, czyli prawdopodobieństwo, że po n krokach cząsteczka przemieści się o m punktów kratowych względem położenia początkowego x_0 . Przy każdym skoku mamy dwie równoprawdopodobne możliwości ruchu. Zatem wszystkich możliwych realizacji n kroków jest 2^n i każda ma takie samo prawdopodobieństwo zaistnienia. Aby po n krokach znaleźć się w pozycji m ,



Rys. 3

Przedstawiona zależność może zostać wyprowadzona ze wzoru Stirlinga: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

mamy $\binom{n}{n_+}$ możliwości. Zatem

$$P(m, n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{n_+! n_-!} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \left(\frac{n-m}{2}\right)!}.$$

Na rysunku 3 możemy zobaczyć, jakie jest prawdopodobieństwo, że przemieścimy się o m punktów kratowych po 50 krokach dla parzystych m spełniających $|m| \leq 20$. Widzimy, że najbardziej prawdopodobne jest przemieszczenie się o zero punktów kratowych. Analizując analogiczne wykresy dla większych wartości n , odnieśliśmy wrażenie, że podlegają one pewnej stabilizacji. Istotnie, matematycznie ta obserwacja wyraża się w następującym stwierdzeniu:

$$P(m, n) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}} \quad \text{dla dużych } n \text{ i parzystych } m.$$

Wykorzystując informację, że $n = \frac{t}{\Delta t}$ i $m = \frac{x}{\Delta x}$, otrzymujemy dyskretną funkcję rozkładu prawdopodobieństwa:

$$P\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right) \approx \tilde{P}(x, t) := \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{4\pi D t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\}, \quad \text{gdzie } D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}.$$

Wprowadzona wyżej funkcja $\tilde{P}(x, t)$ jest rozwiązaniem klasycznego równania dyfuzji:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \Delta x D \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x^2}.$$

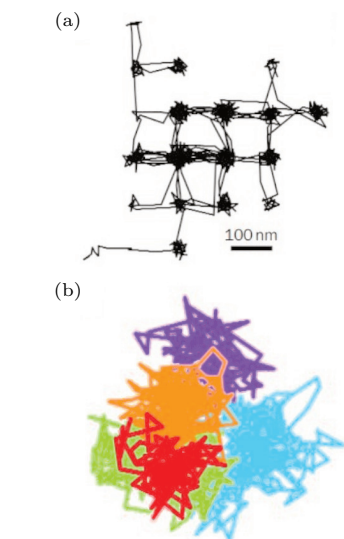
Choć powyższe równanie jest często wykorzystywane w modelowaniu matematycznym, nie wszystkie zjawiska dyfuzji można opisać w ten sposób. Do tej pory zakładaliśmy, że przeskocząca cząsteczka odbywa się w równych odstępach czasu oraz cząsteczka pokonuje zawsze tę samą odległość. Ponadto kolejne skoki są od siebie niezależne. Co, gdy któreś z tych założeń nie zostanie spełnione? Wówczas mówimy, że mamy do czynienia z **dyfuzją anomalną**. Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy cząsteczka zatrzymuje się na pewien czas, zanim przeskoczy dalej. W takiej sytuacji cząsteczki rozprzestrzeniają się wolniej, niż zakłada to klasyczny opis dyfuzji – i mówimy, że mamy do czynienia z **subdyfuzją**. Przyjrzyjmy się następującemu przykładowi takiej sytuacji.

Błona komórkowa oddziela wnętrze komórki od świata zewnętrznego oraz odpowiada za przekazywanie informacji ze środowiska do wnętrza komórki. Transport dyfuzyjny na błonie komórkowej pełni kluczowe funkcje w przekazywaniu sygnału i sposobie, w jaki komórki oddziałują ze swoim otoczeniem. Biorąc pod uwagę, że błona komórkowa jest płynna, można by oczekiwać, że cząsteczki białek będą szybko dyfundować przez błonę, tak aby odpowiednie reakcje mogły zachodzić jak najsprawniej. Nic bardziej mylnego.

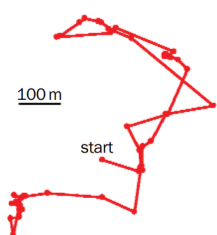
Na początku 2005 roku na Uniwersytecie Nagoya w Japonii naukowcy przeprowadzili następujący eksperyment: śledzili pojedynczą cząsteczkę białka w błonie plazmatycznej żywych komórek. Obrazowanie wideo cząsteczek fluorescencyjnych ujawniło, że cząsteczki te spędzają stosunkowo długi czas uwięzione między przeszkodami o wielkości nanometrów w cytoszkiecie aktynowym komórki. Symulację trajektorii ruchu białka, które pokonuje przeszkodę o powierzchni 120 nm^2 , utworzoną przez cytoszkielet komórki, możemy zobaczyć na rysunku 4a. Eksperymentalne trajektorie białek w błonie plazmatycznej żywej komórki widoczne są z kolei na obrazku 4b.

Anomalna dyfuzja pojawia się też wtedy, gdy cząsteczka przez dość długi czas nie zmienia kierunku, w którym się porusza. Wtedy cząsteczki rozprzestrzeniają się szybciej, niż przewiduje to klasyczna dyfuzja. Zjawisko takie nazywamy **superdyfuzją**. Na rysunku 5 przedstawiona została trajektoria ruchu małpki z rodzaju czeplaków w lesie na meksykańskim Półwyspie Jukatan. Jak widać, poszczególne skoki małpki są różnej długości. Taki proces dyfuzyjny zachodzi szybciej niż normalna dyfuzja – mamy do czynienia z superdyfuzją.

Subdyfuzja zachodzi również podczas przepływu elektronów w półprzewodnikach amorficznych w kserokopiarce. Z kolei za pomocą superdyfuzji można rozsądnie opisać trajektorie lotu albatrosów. Przykładów jest wiele, co prowadzi do jednego wniosku: **anomalna dyfuzja w naturze jest normalna!**



Rys. 4. Na rysunku (b) kolorami wyróżniono fragmenty trajektorii przebyte w wybranych odcinkach czasu. Źródło: [1]



Rys. 5. Źródło: [1]

Literatura

- [1] J. Klatfer, I.M Sokolov, *Anomalous diffusion spreads its wings*; physicsweb.org, 2005.
- [2] A. Tokmakoff, Notatki do kursu *Concepts in Biophysical Chemistry*, prowadzonego na University of Chicago (*Brownian Motion*).