



Podstawowe pojęcia związane z grafami prostymi Czytelnik znajdzie – jeśli jest taka potrzeba – w kąciку nr 68 (Δ_{24}). Graf zorientowany to taki, w których każda krawędź ma nadany zwrot od jednego wierzchołka do drugiego. Krawędź uv grafu zorientowanego można rozumieć jako parę uporządkowaną (u, v) ; tu nadany jest zwrot od u do v . Stosuje się również notację $u \rightarrow v$. Krawędzie uv i vu nie mogą wystąpić jednocześnie. Turniej to graf pełny zorientowany. Ścieżką zorientowaną nazywamy ciąg wierzchołków $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$, a jeśli przechodzi ona przez wszystkie wierzchołki, to nazywamy ją (zorientowaną) ścieżką Hamiltona.

Wskazówki do zadań

1. Niech k oznacza liczbę krawędzi tego grafu. Rozważmy wszystkie 2^k ich kolorowań – każdy z trójkątów jest jednobarwny w dokładnie $2 \cdot 2^{k-3}$ z nich. Otrzymujemy stąd średnią liczbę jednobarwnych trójkątów równą $\frac{1}{4}t$.

2. Niech V będzie zbiorem wierzchołków tego grafu i $|V| = n$. Podzielmy zbiór na dwa niepuste podzbiory A i B ; dodając do tego wszystkie krawędzie danego grafu łączące $a \in A$ z $b \in B$, otrzymamy podgraf dwudzielny. Aby obliczyć średnią liczbę krawędzi w tak otrzymanym grafie, wystarcza dla każdej krawędzi liczyć średnią liczbę krawędzi w podgrafie dwudzielnym. Aby obliczyć średnią liczbę krawędzi w tak otrzymanym grafie, wystarcza dla każdej krawędzi liczyć średnią liczbę krawędzi w podgrafie dwudzielnym. Aby obliczyć średnią liczbę krawędzi w tak otrzymanym grafie, wystarcza dla każdej krawędzi liczyć średnią liczbę krawędzi w podgrafie dwudzielnym.

3. Niech $n = m$. Aby ułatwić obliczenia, można zauważyć, że rosnący ciąg arytmetyczny jednoznacznie określa dwa pierwsze wyrazy, więc z liczb $1, 2, \dots, n$ można ich utworzyć nie więcej niż $\frac{n}{2}$. Każdy taki m -wyrazowy ciąg jest jednobarwny w $2 \cdot 2^{n-m}$ kolorowaniach, czyli łączna liczba jednobarwnych ciągów we wszystkich kolorowaniach jest mniejsza niż $n^2 \cdot 2^{n-m}$. Teraż można obliczyć średnią i skończyć z tego, że jest ona większa lub równa 1.

4. Przypomnijmy, że kwadrat długości wektora jest równy iloczynowi skalarnemu tego wektora przez siebie. Średni kwadrat długości wektora $\varepsilon_1 \vec{v}_1 + \dots + \varepsilon_n \vec{v}_n$ jest równy $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 + \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j$. Nie trudno przekonać się, że dla $i \neq j$ mamy $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$. Oznacza to, że średni kwadrat długości wektora jest równy n , skąd wynika teza.

Metoda średniej w kombinatoryce

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Rozważmy liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 1$) o średniej arytmetycznej A . Wówczas:

- (1) dla pewnego i zachodzi nierówność $a_i \geq A$, jak również dla pewnego j zachodzi nierówność $a_j \leq A$;
- (2) jeśli wszystkie liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są całkowite nieujemne oraz $A < 1$, to dla pewnego i mamy $a_i = 0$.

Dowód można przeprowadzić „w pamięci”, więc go pominię. Poniższe przykłady pokazują te własności w akcji.

Przykład 1 (twierdzenie Szelego). Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Istnieje turniej o n wierzchołkach, w którym jest co najmniej $\frac{n!}{2^{n-1}}$ ścieżek Hamiltona.

Rozwiązanie. Rozważmy wszystkie turnieje o wierzchołkach $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Jest ich $2^{\binom{n}{2}}$, gdyż dla każdego dwuelementowego zbioru wierzchołków musimy zdecydować, czy krawędź między nimi będzie skierowana do wierzchołka o większym indeksie, czy przeciwnie. Ścieżka Hamiltona o kolejnych wierzchołkach $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ występuje w $2^{\binom{n}{2} - (n-1)}$ grafach, gdyż $n-1$ krawędzi ma ustalony, zgodny ze ścieżką zwrot, a pozostałe krawędzie mogą mieć zwrot dowolny. Możemy to zrobić dla każdej permutacji zbioru wierzchołków, więc łącznie we wszystkich możliwych turniejach jest dokładnie $n! \cdot 2^{\binom{n}{2} - (n-1)}$ ścieżek Hamiltona. Średnia ich liczba jest równa

$$\frac{n! \cdot 2^{\binom{n}{2} - (n-1)}}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{n!}{2^{n-1}},$$

więc na mocy własności (1) poszukiwany turniej istnieje.

Przykład 2 (liczby Ramseya). Dla $m \geq 2$ przez $R(m)$ oznaczamy najmniejszą liczbę naturalną n , dla której w każdym kolorowaniu krawędzi grafu pełnego o n wierzchołkach dwoma kolorami otrzymamy jednobarwny graf pełny o m wierzchołkach. Udowodnić, że $R(m) > \sqrt[m]{m!} \cdot 2^{\frac{1}{2}m-1}$.

Rozwiązanie. Niech $n = R(m)$. Rozważmy wszystkie możliwe kolorowania krawędzi grafu K_n (pełnego o n wierzchołkach). Jest ich $2^{\binom{n}{2}}$. Ustalmy pewien podgraf K_m tego grafu. Wszystkich kolorowań, w których ten podgraf ma krawędzie w tym samym kolorze, jest $2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{m}{2}}$, gdyż $\binom{m}{2}$ krawędzi musi być tego samego koloru (jednego lub drugiego), a pozostałe mają kolor dowolny. Wobec tego średnia liczba jednobarwnych podgrafów pełnych na m wierzchołkach jest równa

$$\frac{\binom{n}{m} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{m}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{\binom{n}{m}}{2^{\binom{m}{2}-1}} \leq \frac{n^m/m!}{2^{\frac{1}{2}m-1}}.$$

Z drugiej strony ta średnia jest równa co najmniej 1, gdyż w przeciwnym razie warunek (2) nie byłby spełniony. Otrzymujemy stąd

$$n \geq \sqrt[m]{m!} \cdot 2^{\binom{m}{2}-1} = \sqrt[m]{m!} \cdot 2^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2} - \frac{1}{m}} \geq \sqrt[m]{m!} \cdot 2^{\frac{1}{2}m-1}.$$

Zadania

1. Pewien graf ma t trójkątów. Wykazać, że można pomalować jego krawędzie dwoma kolorami w taki sposób, by liczba jednobarwnych trójkątów nie przekraczała $\frac{1}{4}t$.
2. Wykazać, że graf o $k > 0$ krawędziach ma podgraf dwudzielny o co najmniej $\frac{1}{2}k$ krawędziach.
3. (Liczby van der Waerdena) Niech $W(m)$ oznacza najmniejszą taką liczbę n , że przy każdym kolorowaniu zbioru $1, 2, \dots, n$ dwoma kolorami będziemy mogli z niego wybrać m -wyrazowy, jednobarwny ciąg arytmetyczny. Udowodnić, że $W(m) > 2^{m/2}$.
4. Dane są wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, każdy o długości 1. Udowodnić, że można tak dobrać $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, aby zachodziła nierówność

$$|\varepsilon_1 \vec{v}_1 + \varepsilon_2 \vec{v}_2 + \dots + \varepsilon_n \vec{v}_n| \leq \sqrt{n}.$$