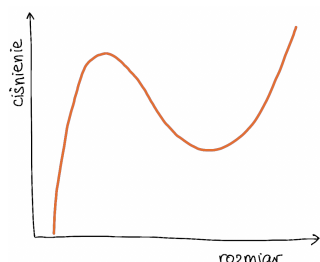


Wykres zależności napięcia od rozciągnięcia dla polimeru



Wykresu zależności ciśnienia wewnątrz balonu od jego rozmiaru. W artykule [*] pokazane jest, jak kształt ten został wyznaczony doświadczalnie

[*] Z. Ješková, D. Featonby, V. Feková: *Balloons revisited*, Physics Education (2012) 47 392.

łańcuchy prostują się i ustawiają w linii. Do tego procesu potrzeba dostarczyć relatywnie dużo energii, ponieważ trzeba zerwać dużo połączeń (wiązań) między fragmentami łańcucha. Dalsze rozciąganie jest o wiele łatwiejsze, gdyż powoduje jedynie rozciąganie łańcuchów – aż do momentu, kiedy zostaną one całkowicie wydłużone, i dostarczenie dodatkowej energii spowoduje zerwanie połączeń między łańcuchami i w końcu pęknięcie gumy. Oznacza to, że elastyczność gumy zmienia się podczas rozciągania, a zależność napięcia w stosunku do stopnia rozciągnięcia nie jest liniowa (patrz wykres napięcie–rozciągnięcie po lewej stronie). Na początku ma stromy obszar, w którym guma jest sztywniejsza, potem środkowy obszar, w którym materiał jest łatwiejszy do rozciągnięcia, a następnie kolejny stromy obszar, w którym gumę coraz trudniej rozciągnąć.

Wróćmy teraz do ciśnienia wewnątrz balonu i spróbujmy wyznaczyć jego charakterystykę w pełnym zakresie nadmuchania balonu. Widać bowiem, że fakt, iż ciśnienie wewnątrz jest odwrotnie proporcjonalne do promienia, nie może być uznany jako uniwersalny dla balonów. W rzeczywistości zależność ciśnienia od rozmiaru w balonie przypomina krzywą w kształcie litery N (patrz wykres rozmiar–ciśnienie po lewej stronie). Stopień krzywizny z kolei zależy od rodzaju gumy. W przypadku naszych balonów możliwa jest sytuacja, w której oba balony, choć różnych rozmiarów, będą napompowane w taki sposób, że ciśnienia wewnątrz będą takie same, i wtedy nic się nie stanie. Da się również tak dobrać poziom napompowania, że duży balon będzie tuż przed granicą pęknięcia i ciśnienie na tyle duże, że nadmucha on mniejszy balon.

Czyżby zatem poprawna odpowiedź na tytułową zagadkę brzmiała: „To zależy”? Tak! I chociaż na temat trudności z udzieleniem jednoznacznej odpowiedzi krąży wiele dowcipów i anegdot, tutaj też potwierdza się fakt, że jeden poziom wyjaśnienia prowadzi do kolejnych i rzuca światło na kolejne szczegóły, które sprawiają, że dane zjawisko staje się trudne do jednoznacznego opisu. A wraz z odpowiedzią na jedno pytanie pojawia się kilka następnych. Swoją drogą ciekawe, jak wyglądałoby zachowanie układu, w którym połączymy więcej balonów. Albo czy układ będzie działał tak samo, jeśli będziemy pompować ten sam balon kilkakrotnie? Balony, chociaż są popularne i używane na co dzień, to ich zachowanie pozostawia nam kilka interesujących obszarów do eksploracji na różnych poziomach. Mam nadzieję, że ten artykuł zachęci Czytelnika do eksperymentowania i zadawania pytań, a to zaowocuje nowymi, fascynującymi odkryciami.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1819. Parami względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie a , b i c są takie, że liczba $(a^2 - bc)^2$ jest podzielna przez $ab + bc + ca$. Udowodnić, że liczba $(b^2 - ac)^2$ również jest podzielna przez $ab + bc + ca$.

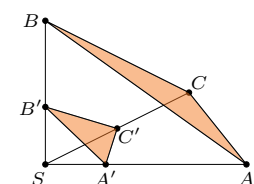
M 1820. Niech $n \geq 3$ będzie nieparzystą liczbą całkowitą. Na tablicy $2n \times 2n$ kolorujemy $2(n-1)^2$ pól. Jaka jest największa liczba narożników $\square$ (dowolnie obróconych), które zawsze można wyciąć z niepokolorowanej części tablicy?

M 1821. Niech $SABC$ będzie ostrosłupem o kątach prostych przy wierzchołku S . Punkty A' , B' , C' leżą, odpowiednio, na krawędziach SA , SB , SC w taki sposób, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne (przyjmujemy, że podobieństwo uwzględnia kolejność wierzchołków). Czy stąd wynika, że płaszczyzny ABC i $A'B'C'$ są równoległe?

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1121. Dwa identyczne kondensatory płaskie połączono szeregowo. Przestrzeń między okładkami pierwszego wypełniono przewodnikiem o oporze właściwym ρ , a drugiego dielektrykiem o przenikalności elektrycznej ϵ . Ile wynosi stała czasowa $\tau = RC$ tego układu?

F 1122. Kompresor używany zwykle do sprężania powietrza wykorzystano do sprężenia helu. Sprężanie przebiega adiabatycznie od $p_0 = 1$ atm do $p = 10$ atm. Jaki jest stosunek temperatur końcowych obu gazów, jeśli początkowa temperatura w obu przypadkach była taka sama i wynosiła T_0 ?



Rozwiązania na str. 24

Rozwiązania zadań ze strony 5



Rozwiązanie zadania F 1121.

Przyjmijmy, że powierzchnia okładek każdego z kondensatorów wynosi S , a odległość okładek to d . Pojemność elektryczna, C , kondensatora wypełnionego dielektrykiem wynosi:

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

Drugi kondensator po wypełnieniu przewodnikiem staje się opornikiem o oporze elektrycznym R między okładkami:

$$R = \frac{\rho d}{S}.$$

Stała czasowa τ charakteryzująca czas ładowania pojemności C przez opornik R wynosi tym samym:

$$RC = \varepsilon \rho.$$

Stała τ nie zależy od rozmiarów kondensatorów – wartości S i d .



Rozwiązanie zadania F 1122.

Hel jest gazem jednoatomowym, a powietrze mieszaniną niemal wyłącznie gazów dwuatomowych: azotu i tlenu. Wykładnik adiabaty κ dla gazu jednoatomowego wynosi $\kappa_1 = 5/3$, a dla dwuatomowego $\kappa_2 = 7/5$. Zwykle pamiętamy, że w przemianie adiabatycznej gazu doskonałego ciśnienie gazu p i jego objętość V spełniają warunek: $pV^\kappa = \text{const}$ (wyrażenie pozostaje stałe). Skorzystanie z równania stanu gazu doskonałego, $pV = nRT$ (n oznacza liczbę moli gazu, a R stałą gazową) pozwala znaleźć związek między temperaturą T i ciśnieniem p gazu w przemianie adiabatycznej:

$$p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{const},$$

skąd łatwo uzyskujemy związek:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

Dla stosunku $p/p_0 = 10$ otrzymujemy temperatury końcowe: dla helu $T_h = 10^{2/5} T_0 \approx 2,512 T_0$, a dla powietrza $T_p = 10^{2/7} T_0 \approx 1,931 T_0$, czyli $T_h/T_p = 10^{4/35} \approx 1,301$.



Rozwiązanie zadania M 1819.

Zauważmy, że

$$a^2 - bc \equiv a(a + b + c) \pmod{ab + bc + ca}.$$

Zatem

$$0 \equiv (a^2 - bc)^2 \equiv a^2(a + b + c)^2 \pmod{ab + bc + ca},$$

więc $ab + bc + ca \mid a^2(a + b + c)^2$.

Gdyby istniała liczba pierwsza p , dla której $p \mid a$ i $p \mid (ab + bc + ca)$, to również $p \mid bc$ – sprzeczność z założeniem, że a, b, c są parami względnie pierwsze. A zatem $\text{NWD}(a, ab + bc + ca) = 1$, więc $ab + bc + ca \mid (a + b + c)^2$. Wtedy jednak, używając analogicznych kongruencji, mamy

$$(b^2 - ac)^2 \equiv b^2(a + b + c)^2 \equiv 0 \pmod{ab + bc + ca}.$$

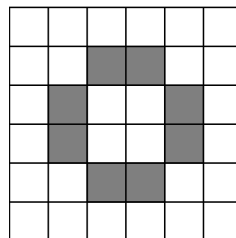


Rozwiązanie zadania M 1820.

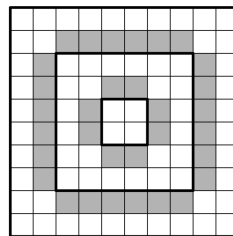
Odpowiedź: $2n - 1$.

Podzielmy tablicę na n^2 kwadratów 2×2 . Aby z jednego takiego kwadratu nie można było wyciąć narożnika, co najmniej dwa jego pola muszą być pokolorowane. Takich kwadratów może być jednak co najwyżej $(2(n-1)^2)/2 = (n-1)^2$, więc zawsze możemy wyciąć $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$ narożników.

Indukcyjnie skonstruujemy teraz kolorowanie tablicy dające maksymalnie $2n - 1$ narożników. Dla $n = 3$ wystarczy pokolorować tablicę 6×6 w następujący sposób.



Dla $n \geq 5$, przechodząc z n do $n + 2$, umieszczamy kopię konstrukcji tablicy $2n \times 2n$ dla n w środku tablicy $(2n + 4) \times (2n + 4)$. Następnie dodatkowymi kwadratami, których jest $2(n+1)^2 - 2(n-1)^2 = 8n$, otaczamy środkową konstrukcję $2n \times 2n$.



Wtedy z założenia indukcyjnego możemy wyciąć maksymalnie $2n - 1$ narożników ze środka i dodatkowo jeszcze co najwyżej cztery narożniki z rogów tablicy, co daje łącznie $2n - 1 + 4 = 2(n + 2) - 1$.



Rozwiązanie zadania M 1821.

Odpowiedź: Tak.

Niech k będzie skalą podobieństwa trójkątów ABC i $A'B'C'$, wtedy $A'B' = kAB$, $B'C' = kBC$ oraz $C'A' = kCA$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równości:

$$SA'^2 + SB'^2 = k^2 AB^2,$$

$$SA'^2 + SC'^2 = k^2 AC^2,$$

$$SB'^2 + SC'^2 = k^2 BC^2,$$

$$SA^2 + SB^2 = AB^2,$$

$$SA^2 + SC^2 = AC^2,$$

$$SB^2 + SC^2 = BC^2.$$

Wobec tego

$$SA'^2 = \frac{k^2(AB^2 + AC^2 - BC^2)}{2} = k^2 SA^2,$$

czyli $SA' = kSA$. Podobnie $SB' = kSB$ oraz $SC' = kSC$, a zatem płaszczyzny ABC i $A'B'C'$ są równoległe.