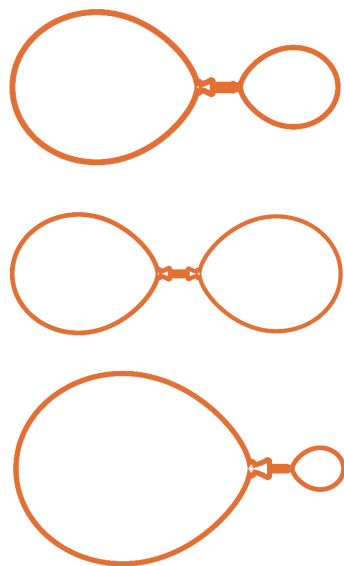


Zagadkowe balony

Agnieszka CHUDEK



Przykładowe sytuacje po otwarciu zaworka

W ogólności możemy rozważyć balony o promieniach a i b i zadanie minimalizacji sumy ich powierzchni. Problem ten sprowadza się do minimalizacji funkcji $a^2 + b^2$, przy ustalonej wartości objętości, czyli warunku $a^3 + b^3 = V = \text{const.}$ Aby to zadanie rozwiązać, wystarczy przekonać się, że zachodzi nierówność $(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)^2$ oraz że równość zachodzi tylko wtedy, gdy jedna z liczb a , b jest zerowa. Właśnie wtedy osiągnęte jest minimum powierzchni.

O równaniu Laplace'a więcej pisał Michał Miśkiewicz w artykule „Bańka jaka jest, każdy widzi”, Δ_{19}^7 .



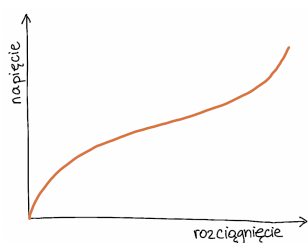
Zmiana struktury polimeru w trakcie rozciągania

Zacznijmy od obiecaniej zagadki. Dwa identyczne balony nadmuchujemy do różnych rozmiarów i łączymy ze sobą za pomocą zaworka, który można otwierać i zamykać (zrobionego np. z dwóch korków od butelki z wodą dla dzieci). Co się stanie, gdy otworzymy zaworek i pozwolimy, aby powietrze swobodnie przepływało między balonami? Czy powietrze przepłynie z mniejszego balonu do większego? Czy może na odwrót? A może nic się nie stanie? A może, jak to zwykle bywa, jedyną słuszną odpowiedzią jest: „To zależy”? Podczas prezentowania tej zagadki w dniu obchodów 50-lecia *Delty* znaczna część publiczności optowała za wariantem, że duży balon napelni mały, aż ich rozmiary się wyrównają. Faktycznie, w pierwszej chwili wydaje się to dość intuicyjne rozumowanie. Jednak po otwarciu zaworu stało się zupełnie odwrotnie. Mniejszy balon napompował większy, a sam skurczył się do niewielkich rozmiarów. Hm... czyżby fizyka po raz kolejny udowodniła prawdziwość *efektu św. Mateusza*, polegającego na ubożeniu biednych i bogaceniu się bogatych? Być może, jednak my przyjrzyjmy się temu zjawisku z różnych stron i spróbujmy wyjaśnić je, odwołując się do praw fizyki.

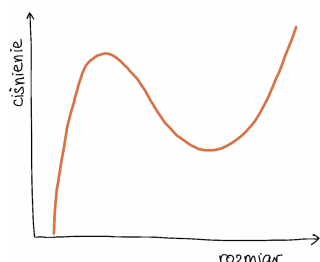
Powierzchnie. Nadmuchując balon, rozciągamy go, a więc zwiększamy jego całkowitą powierzchnię, a do tego potrzebna jest energia. Żeby rozciągnąć gumę bardziej, potrzeba więcej energii – oczywiste. Policzmy zatem całkowitą powierzchnię balonów w kilku przypadkach. Założmy, że balony są idealnie sferyczne i mały ma objętość 1 l, a duży 3 l. Posługując się wzorami na objętość kuli ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$) i pole sfery ($S = 4\pi r^2$), możemy obliczyć, że ich powierzchnie będą wynosiły, odpowiednio, 484 cm² i 1006 cm² (w przybliżeniu), co w sumie daje 1490 cm². Gdyby po odblokowaniu przepływu balony wyrównały rozmiary, wówczas ich objętości łącznie wynosiłyby 2 l, a całkowita powierzchnia około 1535 cm², czyli więcej niż na początku. Taka sytuacja nie może zajść bez dostarczenia dodatkowej energii. A co w przypadku przepływu całości powietrza do dużego balonu? Wtedy na końcu mamy objętości 4 l i 0 l, a całkowita powierzchnia wynosi 1219 cm², czyli mniej niż na początku, zatem przepływ powietrza w tę stronę jest możliwy. Taka argumentacja może posłużyć jako wstępne wyjaśnienie, ale pójdźmy jednak krok dalej. Wszak podstawienie konkretnych wartości i założenie o idealnej sferyczności balonów nie mówią nic o uniwersalności zjawiska.

Ciśnienie. Wiadomo, że przepływ powietrza między balonami odbywa się z powodu różnicy ciśnień wewnątrz nich. Zatem jakie ciśnienie panuje wewnątrz balonu i od czego ono zależy? Wiemy, że ciśnienie powietrza w napompowanym balonie jest większe niż ciśnienie atmosferyczne, a konkretny kształt zawdzięcza on elastycznej gumie, z której jest zrobiony i która także wywiera ciśnienie na powietrze wewnątrz. W kontekście opisanego zjawiska między ciśnieniem wewnątrz balonu a jego rozmiarem (promieniem) przydatne jest odwołanie się do prawa Laplace'a ($\Delta p = \frac{4T}{r}$), które wiąże różnicę ciśnień między wnętrzem a otoczeniem Δp , z napięciem powierzchniowym gumy T i promieniem balonu r . Z interpretacji tego wzoru wynika, że im większy jest promień balonu r , tym mniejsza różnica ciśnień jest potrzebna do jego utrzymania w stanie równowagi. Jest to dość intuicyjne dla każdego, kto choć raz dmuchał balon. W końcu najtrudniej jest zrobić ten pierwszy dmuch, a potem każdy następny jest coraz łatwiejszy. Problem w tym, że powyższe rozumowanie jest prawdziwe dla stałego napięcia powierzchniowego balonu, które w rzeczywistości stałe nie jest.

Guma. No właśnie. Czy prawdą jest, że każdy następny dmuch jest coraz łatwiejszy? Przecież nie możemy dmuchać balonu w nieskończoność i w końcu po kilku dmuchach dochodzimy do momentu, gdy znowu jest trudniej i zaczynamy balansować na granicy pęknięcia. Żeby zrozumieć, dlaczego tak jest, przyjrzyjmy się gumie, z której zrobiony jest balon. Gumowy lateks to polimer, czyli struktura składająca się z długich łańcuchów połączonych ze sobą w wielu miejscach na swojej długości. To właśnie ta struktura odpowiada za sprężyste zachowanie materiału. Gdy materiał nie jest naprężony, łańcuchy polimeru są zwinięte i splątane wokół siebie w losowy sposób. Gdy rozciągamy gumę,



Wykres zależności napięcia od rozciągnięcia dla polimeru



Wykresu zależności ciśnienia wewnątrz balonu od jego rozmiaru. W artykule [*] pokazane jest, jak kształt ten został wyznaczony doświadczalnie

[*] Z. Ješková, D. Featonby, V. Feková: *Balloons revisited*, Physics Education (2012) 47 392.

łańcuchy prostują się i ustawiają w linii. Do tego procesu potrzeba dostarczyć relatywnie dużo energii, ponieważ trzeba zerwać dużo połączeń (wiązań) między fragmentami łańcucha. Dalsze rozciąganie jest o wiele łatwiejsze, gdyż powoduje jedynie rozciąganie łańcuchów – aż do momentu, kiedy zostaną one całkowicie wydłużone, i dostarczenie dodatkowej energii spowoduje zerwanie połączeń między łańcuchami i w końcu pęknięcie gumy. Oznacza to, że elastyczność gumy zmienia się podczas rozciągania, a zależność napięcia w stosunku do stopnia rozciągnięcia nie jest liniowa (patrz wykres napięcie–rozciągnięcie po lewej stronie). Na początku ma stromy obszar, w którym guma jest sztywniejsza, potem środkowy obszar, w którym materiał jest łatwiejszy do rozciągnięcia, a następnie kolejny stromy obszar, w którym gumę coraz trudniej rozciągnąć.

Wróćmy teraz do ciśnienia wewnątrz balonu i spróbujmy wyznaczyć jego charakterystykę w pełnym zakresie nadmuchania balonu. Widać bowiem, że fakt, iż ciśnienie wewnątrz jest odwrotnie proporcjonalne do promienia, nie może być uznany jako uniwersalny dla balonów. W rzeczywistości zależność ciśnienia od rozmiaru w balonie przypomina krzywą w kształcie litery N (patrz wykres rozmiar–ciśnienie po lewej stronie). Stopień krzywizny z kolei zależy od rodzaju gumy. W przypadku naszych balonów możliwa jest sytuacja, w której oba balony, choć różnych rozmiarów, będą napompowane w taki sposób, że ciśnienia wewnątrz będą takie same, i wtedy nic się nie stanie. Da się również tak dobrać poziom napompowania, że duży balon będzie tuż przed granicą pęknięcia i ciśnienie na tyle duże, że nadmucha on mniejszy balon.

Czyżby zatem poprawna odpowiedź na tytułową zagadkę brzmiała: „To zależy”? Tak! I chociaż na temat trudności z udzieleniem jednoznacznej odpowiedzi krąży wiele dowcipów i anegdot, tutaj też potwierdza się fakt, że jeden poziom wyjaśnienia prowadzi do kolejnych i rzuca światło na kolejne szczegóły, które sprawiają, że dane zjawisko staje się trudne do jednoznacznego opisu. A wraz z odpowiedzią na jedno pytanie pojawia się kilka następnych. Swoją drogą ciekawe, jak wyglądałoby zachowanie układu, w którym połączymy więcej balonów. Albo czy układ będzie działał tak samo, jeśli będziemy pompować ten sam balon kilkakrotnie? Balony, chociaż są popularne i używane na co dzień, to ich zachowanie pozostawia nam kilka interesujących obszarów do eksploracji na różnych poziomach. Mam nadzieję, że ten artykuł zachęci Czytelnika do eksperymentowania i zadawania pytań, a to zaowocuje nowymi, fascynującymi odkryciami.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1819. Parami względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie a , b i c są takie, że liczba $(a^2 - bc)^2$ jest podzielna przez $ab + bc + ca$. Udowodnić, że liczba $(b^2 - ac)^2$ również jest podzielna przez $ab + bc + ca$.

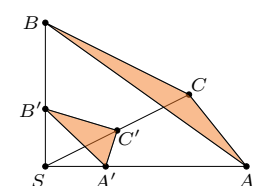
M 1820. Niech $n \geq 3$ będzie nieparzystą liczbą całkowitą. Na tablicy $2n \times 2n$ kolorujemy $2(n-1)^2$ pól. Jaka jest największa liczba narożników $\square$ (dowolnie obróconych), które zawsze można wyciąć z niepokolorowanej części tablicy?

M 1821. Niech $SABC$ będzie ostrosłupem o kątach prostych przy wierzchołku S . Punkty A' , B' , C' leżą, odpowiednio, na krawędziach SA , SB , SC w taki sposób, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne (przyjmujemy, że podobieństwo uwzględnia kolejność wierzchołków). Czy stąd wynika, że płaszczyzny ABC i $A'B'C'$ są równoległe?

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1121. Dwa identyczne kondensatory płaskie połączono szeregowo. Przestrzeń między okładkami pierwszego wypełniono przewodnikiem o oporze właściwym ρ , a drugiego dielektrykiem o przenikalności elektrycznej ϵ . Ile wynosi stała czasowa $\tau = RC$ tego układu?

F 1122. Kompresor używany zwykle do sprężania powietrza wykorzystano do sprężenia helu. Sprężanie przebiega adiabatycznie od $p_0 = 1$ atm do $p = 10$ atm. Jaki jest stosunek temperatur końcowych obu gazów, jeśli początkowa temperatura w obu przypadkach była taka sama i wynosiła T_0 ?



Rozwiązania na str. 24