



Tertium non datur

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Ten odcinek poświęcony jest przedmiotom, które mogą występować jedynie w dwóch rodzajach.

Przykłady są liczne: liczba całkowita jest parzysta lub nieparzysta, niezerowa liczba rzeczywista jest dodatnia lub ujemna, pomiędzy dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi jest nierówność w lewą lub prawą stronę, gra bez remisu kończy się dla jednego z graczy wygraną lub przegraną, moneta ma orła i reszkę, prosta dzieli płaszczyznę na część „lewą” i „prawą”, każdy kij ma dwa końce, każdy medal ma dwie strony i tak dalej, i tak dalej.

Jeśli mamy trzy przedmioty występujące w dwóch rodzajach, to pewne dwa z nich są tego samego rodzaju. Tu również można mnożyć przykłady: wśród trzech liczb całkowitych znajdują się dwie liczby tej samej parzystości, pośród trzech punktów pomalowanych na czarno lub białą pewne dwa są tego samego koloru, w trzech rzutach monetą co najmniej dwa razy

wypadnie to samo, pośród trzech osób pewne dwie są tej samej płci. . .

Powyższe prawo można uogólnić. Gdy weźmiemy nieparzystą liczbę przedmiotów występujących w dwóch rodzajach, to jeden z rodzajów dominuje – jest go więcej niż drugiego rodzaju (nie może być po tyle samo, bo liczba przedmiotów jest nieparzysta).

Zadania

- Każda z liczb rzeczywistych a, b, c jest większa od iloczynu dwóch pozostałych. Udowodnić, że co najmniej jedna z tych liczb jest dodatnia.
- Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. W $(2n + 1)$ -kącie foremnym pomalowano na beżowo $n + 2$ wierzchołków. Udowodnić, że istnieje co najmniej $n - 1$ par odcinków równoległych o beżowych końcach.
- Każdy punkt okręgu zabarwiono na pomarańczowo lub różowo. Udowodnić, że pewne trzy punkty jednakowego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.
- Pięć wierzchołków dwudziestościanu foremnego pomalowano na czerwono, a pozostałe siedem na zielono. Udowodnić, że pewne trzy wierzchołki czerwone wyznaczają płaszczyznę prostopadłą do prostej wyznaczonej przez pewne dwa wierzchołki zielone.
- Każdy z wierzchołków $3n$ -kąta foremnego, wpisanego w okrąg ω , pomalowano na żółto lub na niebiesko. Udowodnić, że można wskazać n łuków o długości $\frac{1}{3}$ obwodu okręgu ω , z których każdy ma oba końce żółte lub oba końce niebieskie.
- Dowieść, że nie można przeciąć wszystkich trzech boków trójkąta jedną prostą (prosta przecina odcinek, jeśli ma z nim dokładnie jeden punkt wspólny, różny od jego końców).
- Każdy wierzchołek dwudziestościanu foremnego jest brązowy lub fioletowy. Krawędzie o końcach tego samego koloru pomalowano na seledynowo. Znajdź najmniejszą możliwą liczbę seledynowych krawędzi.
- Danych jest sześć różnych liczb dodatnich: $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$. Niech P_1 będzie prostopadłościanem o wymiarach $a_1 \times b_1 \times c_1$, a P_2 – prostopadłościanem o wymiarach $a_2 \times b_2 \times c_2$. Wykazać, że w jednym z tych prostopadłościanów można wydrążyć tunel, przez który przejdzie drugi prostopadłościan.



4. Pewna główna przekątna dwudziestościanu ma oba końce zielone. Pięć wierzchołków czerwonych rozmieszczonych jest na dwóch płaszczyznach prostopadłych do tej przekątnej.
5. Rozważmy trójkąty równoboczne, których wierzchołkami są kolorowe punkty. Każdy z nich ma parę wierzchołków jednakowego koloru.
6. Prosta dzieli płaszczyznę na dwie części.
7. Każda ściana dwudziestościanu ma co najmniej jeden seledynowy bok, a każda seledynowa krawędź należy do dwóch ścian.
8. Rozważmy nierówności $a_1 * a_2, b_1 * b_2, c_1 * c_2$ (w miejscach * jest < lub >). Pewne dwie z nich są w tę samą stronę.

1. Jeżeli któraś z liczb a, b, c jest zerem, to teza jest oczywista. W przeciwnym razie pewne dwie z tych liczb mają ten sam znak.
2. Niech O będzie środkiem danego wielokąta. Ustalmy niepokolorowany wierzchołek A . Pozostałe $2n$ wierzchołków wyznacza n odcinków prostopadłych do OA . Pewne dwa z nich mają oba końce beżowe.
3. Każde trzy wierzchołki pięciokąta foremnego wyznaczają trójkąt równoramienny.

Wskazówki do zadań