



W 80 dni dookoła...

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

W tym numerze, bez szczególnego wstępu, zapraszam do zmagania z kombinatorycznymi zadaniami o okręgach i sferach.

Zadania

- Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy mają w sumie tyle paliwa, aby wystarczyło Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu. Dowieść, że Fredek może rozpocząć podróż od kolegi w takim miejscu, że jadąc po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.
(Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej, 1999)
- Świat ma kształt sfery. Fredek, spoglądając na świat z dowolnego punktu leżącego na zewnątrz świata, uszczęśliwia tę część świata, którą widzi. 21 stycznia o godzinie 10:00 Fredek spojrział na świat po raz pierwszy, 21 lutego o godzinie 10:00 Fredek spojrział na świat (być może z innego punktu) po raz drugi i podobnie 21 dnia każdego miesiąca spoglądał na świat o godzinie 10:00. Kiedy najwcześniej Fredek może uszczęśliwić cały świat?
(Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej, 2001)
- Na okręgu o środku O pomalowano na czerwono pewną skończoną liczbę rozłącznych łuków. Udowodnić, że jeśli łączna długość czerwonych łuków:
 - jest większa niż połowa długości okręgu, to dla pewnych dwóch czerwonych punktów A i B kąt AOB jest prosty.
 - jest mniejsza niż połowa długości okręgu, to takich punktów jak wyżej być nie musi.
 (IX Wielkopolska Liga Matematyczna, zmodyfikowane)
- Rozwiązać trójwymiarową wersję punktu (b) poprzedniego zadania: pokoloruj na czerwono pewien obszar sfery mniejszy niż $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0,2929$ jej powierzchni w taki sposób, by nie było dwóch czerwonych punktów tworzących kąt prosty o wierzchołku w środku sfery.
- Na torze w kształcie okręgu biegnie n zawodników, każdy porusza się ze stałą szybkością i wszyscy biegną w tę samą stronę. Zawodnicy wystartowali równocześnie z tego samego miejsca na torze. Po pewnym czasie wszyscy równocześnie wrócili w to miejsce i zakończyli bieg. Każdy z nich wykonał inną liczbę okrążeń. Na torze było dokładnie k miejsc, w których wszyscy zawodnicy pojawili się równocześnie, wliczając w to miejsce startu. W zależności od n wyznaczyć wszystkie możliwe wartości k .
(Matematyczny Kalendarz Adwentowy 2023, zmodyfikowane)
- Po okrągłym torze o długości 1 biega n zawodników. Wszyscy zaczynają w tym samym miejscu i poruszają się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, każdy z inną szybkością, wyrażającą się liczbą naturalną. Nazwijmy biegacza δ -samotnym, jeśli na łukach otwartych o długości δ w przód i wstecz od niego nie ma żadnych innych biegaczy. Przez δ_n oznaczmy największą taką liczbę, dla której, niezależnie od szybkości biegaczy, każdy z nich w pewnym momencie jest δ_n -samotny.
 - Udowodnić, że $\delta_2 = \frac{1}{2}$ i $\delta_3 = \frac{1}{3}$.
 - Wykazać, że $\delta_n \geq \frac{1}{2n}$.
 (Problem samotnego biegacza)

Ciekawostka. Wiadomo, że $\delta_n = \frac{1}{n}$ dla $n \leq 7$, a wartości δ_n dla $n \geq 8$ nie są znane.
kolora w Δ_{12} .
(b) Rozwiązanie można znaleźć w artykule *Problem samotnego* (znajemy, że „dwukąt” to średnica okręgu). Jeden z wierzchołków tego wielokąta jest oddalony od punktu A o co najwyżej $\frac{1}{3}$ okręgu.
wpisanego w okrąg toru, którego jednym z wierzchołków jest punkt A pozostałych dwóch biegaczy są wierzchołkami wielokąta foremnego o boku $\frac{1}{3}$. Można przyjąć (dlaczego?), że porusza się on dowolnego biegacza. Można przyjąć (dlaczego?), że porusza się on o $\frac{1}{3}$. Wybierzmy
6. (a) Podpowiemy jedynie, jak uzasadnić $\delta_3 \geq \frac{1}{3}$. Wybierzmy
z szybkością $i + \frac{1}{n}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, to jest dokładnie k miejsc
5. Przyjmijmy długość toru równą 1. Jeśli i -ty zawodnik biegnie
wskazówce do tego zadania.
powierzchni kuli n -wymiarowej jest analogiczny do opisanego we
Hypoteza dwóch czapek mówi, że optymalny wybór czerwonej
ze $\alpha_3 > 0,2978$. Żadna dokładna wartość α_n dla $n > 2$ nie jest znana.
ze $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, a w trzecim, ze $\alpha_3 \geq 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0,2929$. Wiadomo również,
gwarantuje wystąpienie kąta prostego. W zadaniu trzecim dowodzimy,

Wskazówki do zadań
1. Najpierw wykonajmy symulację podróży, rozpoczynając od dowolnego kolegi i dopuszczając ujemną ilość paliwa. Właściwa podróż należy zacząć w punkcie, w którym Fredek miał najmniej paliwa podczas symulacji.
2. Fredek jednakowo nie uszczęśliwi pewnego okręgu wielkiego sfery, a więc w dwóch spójrznięciach nie uszczęśliwi pewnych dwóch punktów antypodalnych.
3. (a) Obróćmy okrąg o 90 stopni wokół jego środka. Jeśli czerwona powierzchnia jest większa niż $\frac{1}{2}$ okręgu, to pewien czerwony punkt A oraz obraz pewnego czerwonego punktu B pokryją się. Kąt AOB jest prosty.
(b) Narzuciśmy okrąg w taki sposób, by jego środek był środkiem układu współrzędnych. Pomalujmy na czerwono dwa łuki otwarte, każdy z nich długości $\frac{1}{4}$ okręgu, jeden leżący w I ćwiartce układu, a drugi w III.
4. Rozważyć otwarte „kola podbiegunowe” rozpoczynające się od 45° szerokości geograficznej.
Ciekawostka. To i poprzednie zadanie są szczególnymi przypadkami problemu *Witsenhausena*. Oznaczmy przez α_n najmniejszą taką liczbę, że pomalowanie więcej niż α_n powierzchni kuli n -wymiarowej