



Harmonia na trzy czwarte...

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

W całym odcinku zakładamy, że A, B, X, Y to cztery różne punkty.

Rozważmy różne punkty, A, B, X, Y , leżące na jednej prostej. Mówimy, że odcinki AB i XY są *sprężone harmonicznie*, jeśli zachodzi równość $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AY|}{|BY|}$; równoważnie – co dowodzi symetrii tej relacji – mamy $\frac{|XA|}{|YA|} = \frac{|XB|}{|YB|}$.

Dodamy teraz na prostej AB sztuczny punkt w nieskończoności – oznaczmy go po prostu ∞ – o tej własności, że $\frac{|A\infty|}{|B\infty|} = 1$. Jeśli X jest środkiem odcinka AB , to odcinki AB i $X\infty$ są harmonicznie sprężone. Punkt ∞ nazywany jest niekiedy miejscem przecięcia prostych równoległych (taki punkt dopuszcza się między innymi w geometrii rzutowej).

Twierdzenie 3/4. Na prostej z dodanym punktem w nieskończoności – jeżeli odcinki AB i XY są harmonicznie sprężone, to dowolne trzy spośród punktów A, B, X, Y jednoznacznie określają położenie czwartego.

Dowód. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że wyznaczmy położenie punktu Y za pomocą pozostałych. Dobierzmy taką oś liczbową, żeby punkt A był w jedynce, a punkt B w minus jedynce. Przez x oraz $y = f(x)$ oznaczmy współrzędne punktów X i Y . Na mocy definicji otrzymujemy $\frac{|x-1|}{|x+1|} = \frac{|y-1|}{|y+1|}$, co po obu stronach podniesieniu do kwadratu, przy założeniach $x, y \notin \{-1, 0, 1\}$ i $x \neq y$, upraszcza się do postaci równoważnej $f(x) = y = \frac{1}{x}$. Jest to bijekcja zbioru $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ na ten sam zbiór, a ponadto $f(0) = \infty$ i $f(\infty) = 0$.

Kolejne twierdzenie pokazuje typowe konfiguracje geometryczne, w których pojawiają się pary odcinków harmonicznie sprężonych.

Twierdzenie 2. Jeśli zachodzi którykolwiek z poniższych warunków, to odcinki AB i XY są sprężone harmonicznie:

- (1) punkty A i B są środkami podstaw trapezu, punkt X jest przecięciem jego przekątnych, a punkt Y – prostych zawierających jego ramiona;

- (2) punkty K, L, X leżą, odpowiednio, na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC , przy czym odcinki AK, BL, CX przecinają się w jednym punkcie, proste KL i AB przecinają się w punkcie Y ;
- (3) punkty X i Y leżą na prostej AB , przy czym proste CX i CY są dwusiecznymi kątów przy wierzchołku C trójkąta ABC , odpowiednio, wewnętrznego i zewnętrznego.

Dowód

- (1) Niech $PQRS$ będzie rzeczonym trapezem, w którym punkt A jest środkiem podstawy PQ . Trójkąty PQY i SRY są jednokładne względem punktu Y , natomiast trójkąty PQX i RSX – względem punktu X . Z tego wynika, że punkty A, X, B, Y są współliniowe. Ponadto skalą obu jednokładności jest $\frac{|RS|}{|PQ|}$, więc $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AY|}{|BY|}$. Jeśli trapez $PQRS$ jest równoległobokiem, to $Y = \infty$, a X jest środkiem odcinka AB .
- (2) W trójkącie ABC z twierdzenia Cevy dla odcinków AK, BL i CX oraz z twierdzenia Menelaosa dla prostej KL otrzymujemy, odpowiednio:

$$\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1, \quad \frac{|AY|}{|YB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1.$$

Porównując oba wyrażenia, dostaniemy $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AY|}{|BY|}$. W przypadku gdy $KL \parallel AB$ (równoważnie: X jest środkiem odcinka AB), mamy $Y = \infty$.

- (3) Na mocy twierdzenia o dwusiecznej (wewnętrznej i zewnętrznej) otrzymujemy $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AY|}{|BY|}$. Jeśli $|AC| = |BC|$, to X jest środkiem odcinka AB oraz $Y = \infty$.

Zadania

1. Załóżmy, że punkty A, X, B, Y leżą w tej kolejności na jednej prostej. Niech O będzie środkiem odcinka AB . Udowodnić, że następujące stwierdzenia są równoważne:
 - (a) odcinki AB i XY są harmonicznie sprężone;
 - (b) $|AB|$ jest średnią harmoniczną AX i AY ;
 - (c) $|OB|$ jest średnią geometryczną OX i OY .
2. Dany jest trójkąt ABC . Punkty X_A, X_B, X_C leżą na odcinkach, odpowiednio, BC, CA, AB . Prosta X_BX_C przecina prostą BC w punkcie Y_A . Analogicznie określamy punkty Y_B i Y_C . Wykazać, że jeśli odcinki AX_A, BX_B, CX_C przecinają się w jednym punkcie, to punkty Y_A, Y_B, Y_C leżą na jednej prostej.
3. Okręgi ω_1 i ω_2 , o środkach odpowiednio O_1, O_2 i promieniach r_1, r_2 , przecinają się w dwóch punktach, z których jednym jest T , przy czym $\angle O_1TO_2 = 90^\circ$. Pewna prosta przechodząca przez punkt O_1 przecina okrąg ω_1 w punktach A i B , a okrąg ω_2 – w punktach X i Y . Wykazać, że odcinki AB i XY są harmonicznie sprężone.
4. Z punktu Y leżącego poza okręgiem ω poprowadzono styczne do tego okręgu w punktach P i Q . Na cięciwie PQ wybrano punkt X . Prosta XY przecina okrąg ω w punktach A i B . Dowiedzieć, że odcinki AB i XY są harmonicznie sprężone.

Wskazówki do zadań

1. Można przyjąć na przykład $|AX| = x$, $|XB| = y$, $|BY| = z = -z$ – wówczas dowód sprowadza się do prostych algebraicznych przekształceń.
2. Skorzystaj z definicji sprężenia harmonicznego dla odcinków AB i XC oraz z twierdzenia Cevy i Menelaosa.
3. Skorzystaj z zadania 1(c), obliczając dwa sposoby potęg punktu O_1 względem okręgu ω_2 .
4. Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, otrzymujemy $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AY|}{|YB|}$ i $\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|BY|}{|YC|}$.