

Nie wszystko istnieje, co pomyśli głowa

Jarosław GÓRNICKI

Bernhard Riemann (1826–1866) w 1854 roku przedstawił Wydziałowi Filozoficznemu Uniwersytetu w Getyndze pracę habilitacyjną „Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe” (praca została opublikowana w 1867 r., po śmierci Riemanna). W tej pracy nakreślona została koncepcja całki Riemanna, ale przykład funkcji ilustrującej jej istotę okazał się trochę skomplikowany.

Oj, myślę sobie czasem od samego rana,
W czym jest całka Lebesgue’a lepsza
od Riemanna,

Głupio będzie Riemannowi,
Jak się w grobie o tym dowi.

Z „Hymnu matematyków”
(lata 60. XX wieku)

O mierze i całce Lebesgue’a pisał Michał
Miśkiewicz w Δ_{22}^4 .



W 1875 roku Carl Johannes Thomae (1840–1921) [1] podał elementarny przykład funkcji nieciągłej w nieskończenie wielu punktach, która jest całkowalna w sensie Riemanna. Funkcja ta stała się koronnym argumentem świadczącym o wyższości całki Riemanna (1854) nad całką Cauchy’ego (1823).

Fundamentalne pytania Riemanna: Jak nieciągła może być funkcja całkowalna? – nadal czekało na odpowiedź. Dopiero po blisko pięćdziesięciu latach powstała teoria miary i całki Lebesgue’a (1902), ogólniejsza od całki Riemanna!

W międzyczasie panowało przekonanie o możliwości tworzenia najdziwniejszych funkcji. Na brak przykładu funkcji ciągłej w punktach wymiernych, a nieciągłej w punktach niewymiernych odpowiadano, że to tylko kwestia czasu i właściwego pomysłu, którego teraz brakuje.

Kłam tego typu spekulacjom zadał dziewiętnastoletni Vito Volterra (1860–1940) w pracy [2], gdy był studentem Scuola Normale Superiore di Pisa.

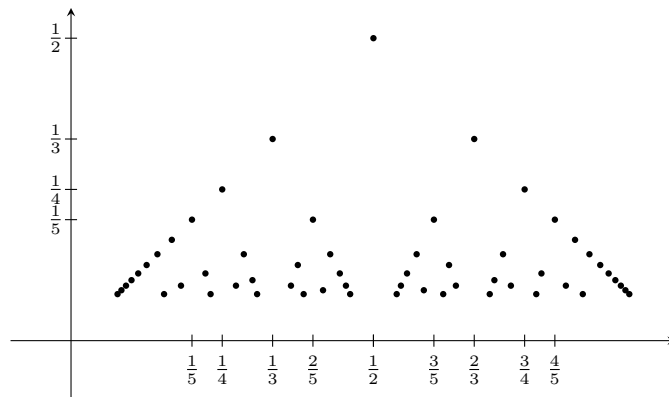
Zanim przedstawimy obserwację Volterry, wykazaną elementarnymi środkami, popatrzymy na funkcję Thomae.

Przykład (C.J. Thomae, 1875). Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją opisaną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{dla } x = \frac{p}{q}, \text{ gdzie } p \neq 0, q > 0 \text{ i ułamek } \frac{p}{q} \text{ jest nieskracalny,} \\ 0 & \text{dla liczb niewymiernych } x. \end{cases}$$

Funkcja f jest ciągła dla każdej niewymiernej wartości x i jest nieciągła w każdym punkcie wymiernym x , co poniżej sprawdzimy.

Zauważmy, że f jest funkcją okresową o okresie podstawowym równym 1. Ponieważ dla liczby niewymiernej x liczba $x + 1$ też jest niewymierna, więc $f(x) = f(x + 1) = 0$. Dla $x = 0$, $f(0) = f(1) = 1$. Gdy $x = \frac{p}{q}$ i ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, to $x + 1 = \frac{p+q}{q}$ i ułamek $\frac{p+q}{q}$ pozostaje nieskracalny. Zatem $f(\frac{p}{q}) = f(\frac{p+q}{q}) = \frac{1}{q}$.



Rys. 1. Przybliżenie funkcji f w przedziale $(0, 1)$

W punkcie $x = 0$ funkcja f nie jest ciągła, bo $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q} \rightarrow 0 \neq 1 = f(0)$ przy $q \rightarrow \infty$. Niech $x_0 \in (0, 1)$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona liczba takich liczb naturalnych q , że $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$. To oznacza, że w przedziale $(0, 1)$ jest tylko skończenie wiele liczb wymiernych $\frac{p}{q}$, dla których $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \geq \varepsilon$. Istnieje więc taka $\delta > 0$, że w otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nie ma punktów x , dla których $f(x) \geq \varepsilon$ (być może z wyjątkiem punktu x_0). Zatem dla wszystkich punktów x takich, że $0 < |x - x_0| < \delta$ mamy $|f(x)| < \varepsilon$. Dowolność wyboru $\varepsilon > 0$ oznacza, że $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ dla każdego punktu $x_0 \in (0, 1)$.

Literatura

- [1] C.J. Thomae, „Ein Beispiel einer Function, welche in keinem Intervalle beschränkt ist, aber doch Riemann’sche Integral besitzt”, Sitzungsber. Berliner Math. Gesellschaft, 1875.
- [2] V. Volterra, „Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue”, Giornale di matematiche 19 (1881), 76–87.

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *gęsty*, gdy każdy niepusty przedział otwarty zawiera co najmniej jeden element zbioru A .



Vito Volterra (1860–1940), Piza 1881

Vito Volterra był jednym z prekursorów analizy funkcjonalnej, stworzył teorię funkcji, których argumentami są funkcje (1887). Miał znaczące osiągnięcia w teorii równań całkowych. W 1931 roku z powodu odmowy złożenia przysięgi lojalności wobec faszystowskiego rządu Benito Mussoliniego został usunięty z zajmowanych stanowisk.

Twierdzenie (G. Cantor). *Niech $\{F_k\}$ będzie ciągiem zstępującym $F_k \supset F_{k+1}$ niepustych przedziałów domkniętych i ograniczonych na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$. Wtedy $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$.*

Wniosek ten można również uzyskać, rozważając zbiory F_σ i G_δ (pisał o tym Jerzy Ryll w Δ_{83}^8) lub korzystając z twierdzenia Baire'a (1899).

W konsekwencji, jeśli x_0 jest liczbą niewymierną, to $f(x_0) = 0$, więc funkcja f jest w tym punkcie ciągła. Jeśli x_0 jest liczbą wymierną, to $f(x_0) \neq 0$, więc funkcja f w tym punkcie nie jest ciągła.

Okresowość funkcji f rozciąga te własności na całą dziedzinę $\mathbb{R}$. $\square$

Mamy więc przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, w której punkty ciągłości oraz punkty nieciągłości tworzą zbiory gęste, i to dość dokładnie wymieszane.

Przyjmijmy następujące określenie. Funkcję $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *punktowo nieciągłą*, gdy jest nieciągła w nieskończenie wielu punktach, pozostając funkcją ciągłą na gęstym podzbiórze dziedziny.

Oto zapowiadany rezultat odkryty przez dziewiętnastoletniego Volterę.

Twierdzenie (V. Volterra, 1881). *Nie istnieją dwie funkcje punktowo nieciągłe $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, dla których zbiór punktów ciągłości jednej jest zbiorem punktów nieciągłości drugiej, i vice versa.*

Dla ustalonej funkcji f niech $C_f = \{x \in (a, b) : f \text{ jest funkcją ciągłą w } x\}$, $D_f = \{x \in (a, b) : f \text{ nie jest funkcją ciągłą w } x\}$. Są to takie zbiory niepuste, że $C_f \cup D_f = (a, b)$ i $C_f \cap D_f = \emptyset$.

Założmy, że f i g są takimi funkcjami punktowo nieciągłymi, że $C_f = D_g$ i $D_f = C_g$. Skoro f jest funkcją punktowo nieciągłą, to istnieje punkt x_0 , w którym f jest ciągła. Wtedy z definicji ciągłości funkcji w punkcie dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ istnieje taka $\delta > 0$, że przedział otwarty $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ i jeśli $0 < |x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}$. W przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ wybieramy przedział domknięty $[a_1, b_1]$, $a_1 < b_1$. Wówczas, korzystając z nierówności trójkąta, dla dowolnych $x, y \in [a_1, b_1]$ mamy

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad (1)$$

Ponieważ g też jest funkcją punktowo nieciągłą, więc w przedziale otwartym (a_1, b_1) istnieje punkt x_1 , w którym g jest ciągła. Stosując podaną wyżej argumentację do funkcji g , znajdujemy taki przedział domknięty $[a'_1, b'_1] \subset (a_1, b_1)$, że dla dowolnych $x, y \in [a'_1, b'_1]$ mamy $|g(x) - g(y)| < 1$. Łącznie z warunkiem (1), dla dowolnych $x, y \in [a'_1, b'_1]$ otrzymujemy

$$|f(x) - f(y)| < 1 \text{ i } |g(x) - g(y)| < 1.$$

Powtarzając to rozumowanie dla kolejnych wartości ε równych, odpowiednio, $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^k}, \dots$ otrzymujemy ciąg takich przedziałów domkniętych

$$[a'_1, b'_1] \supset [a'_2, b'_2] \supset [a'_3, b'_3] \supset \dots,$$

że jeśli $x, y \in [a'_k, b'_k]$, to

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^{k-1}} \text{ i } |g(x) - g(y)| < \frac{1}{2^{k-1}}. \quad (2)$$

Twierdzenie Cantora (zob. margines obok) gwarantuje istnienie punktu $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a'_k, b'_k]$.

W punkcie c funkcja f jest ciągła. Istotnie, dla danego $\varepsilon > 0$ tak wybieramy liczbę naturalną k , aby $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$. Ponieważ $c \in [a'_{k+1}, b'_{k+1}]$, a przedział $[a'_{k+1}, b'_{k+1}]$ zawarty jest w przedziale otwartym (a'_k, b'_k) , więc istnieje taka $\delta > 0$, że $(c - \delta, c + \delta) \subset (a'_k, b'_k) \subset [a'_k, b'_k]$. Wtedy z warunku (2) dla dowolnego x takiego, że $0 < |x - c| < \delta$, mamy $|f(x) - f(c)| < \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$. Oznacza to, że $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$, czyli f jest funkcją ciągłą w punkcie c . Identyczna argumentacja pokazuje, że funkcja g też jest ciągła w punkcie c . Zatem $c \in C_f \cap C_g = C_f \cap D_f = \emptyset$. Sprzeczność.

Przykład Thomae w połączeniu z wynikiem Volterry zapewnia następujący wniosek:

Wniosek. *Nie istnieje funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest ciągła w każdym punkcie wymiernym i nieciągła w każdym punkcie niewymiernym dziedziny.*

Przynajmniej w matematyce istnieją granice osobliwości!