

Do współrzędnych x, y, z dodajemy teraz czwartą współrzędną t i każdy z okręgów przedłużamy do sfery w tej większej przestrzeni. Bardziej precyzyjnie, $S_i \subseteq \mathbb{R}^4$ definiujemy jako zbiór punktów oddległych od $(x_i, y_i, z_i, 0)$ o r_i , jednocześnie spełniających to samo równanie co wcześniej. Warto się zastanowić i odnotować – choć wymaga to odrobiny wyobraźni – że w przestrzeni punktów (x, y, z, t) pojedyncze równanie $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$ zadaje podprzestrzeń wymiaru 3, i w tej podprzestrzeni punkty równoodległe od danego faktycznie tworzą tradycyjną sferę. W naszej konstrukcji kluczowa jest następująca obserwacja, analogiczna do przypadku jednowymiarowego.

Kluczowa obserwacja: *Jeśli okręgi $o_1, \dots, o_n \subseteq \mathbb{R}^3$ były niesplątane, to skonstruowane sfery $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathbb{R}^4$ są rozłączne.*

„Kluczowa” nie oznacza, że oczywista. Zanim więc ją uzasadnimy, odetnijmy kupony od jej konsekwencji. Podobnie jak poprzednio, otrzymaną konfigurację możemy ciąć płaszczyznami $t = \text{const}$ na różnych wysokościach, otrzymując film o okręgach: każdy z nich kurczy się do punktu i znika, unikając kolizji z pozostałymi. Z braku lepszej ilustracji warto znowu spojrzeć na rysunek 4, tym razem w nowym świetle. Zresztą ten film można opisać bez wychodzenia do czwartego wymiaru: okrąg o_i kurczy się zgodnie ze wzorem na promień $r(t) = \sqrt{r_i^2 - t^2}$, a po czasie r_i znika.

Pozostaje techniczny szczegół: przyjęło się, że przy rozplątywaniu okręgów nie należy ich anihilować. Nietrudno to naprawić, bo dzięki rozłączności sfer S_i nie zdarza się, by dwa okręgi o_i „znikały” w tym samym punkcie i czasie. Możemy więc na chwilę przed

„zniknięciem” o_i zapauzować film i przesunąć ten tygielny okrąg daleko poza scenę, by nie przeszkadzał w dalszym rozwoju wydarzeń (Czytelnik wybaczy mi tutaj skąpość opisu formalnego). W rezultacie po czasie $\max(r_1, \dots, r_n)$ widzimy n małych okręgów umieszczonych daleko od siebie, co rzeczywiście przekonuje nas o tym, że na początku nie mogły być splątane.

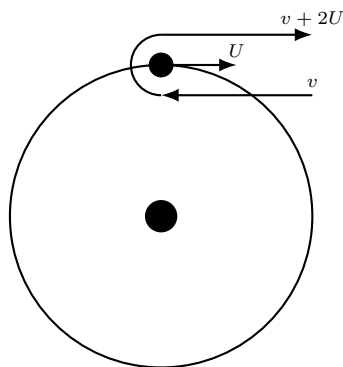
Czytelnikom Najwytrwalszym proponuję na deser uzasadnienie „kluczowej obserwacji”. Przypuśćmy, że dwie sfery S_i, S_j jednak się przecinają, a więc dwa okręgi o_i, o_j nachodzą na siebie w trakcie ewolucji. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy płaszczyzny tych dwóch okręgów zawierają wspólną prostą ℓ , na której ma miejsce kolizja. Prześledźmy więc dokładnie, co się dzieje na tej prostej. Początkowo przecięcia $o_i \cap \ell, o_j \cap \ell$ tych okręgów z prostą tworzą dwie pary punktów. Co ważne – niesplątanych, a więc jak na rysunku 3bc! Polecam zastanowić się, dlaczego przecięcia odpowiadające rysunkowi 3a są możliwe tylko w przypadku okręgów splątanych. Czytelnik zapewne już się spodziewa, co dzieje się dalej: te dwie pary podlegają ewolucji jak w przypadku jednowymiarowym. Rzeczywiście, twierdzenie Pitagorasa przekonuje nas, że przecięcie S_i z płaszczyzną odpowiadającą ℓ (czyli utworzoną przez osie ℓ oraz t) jest okręgiem – tym samym okręgiem, który rozważalibyśmy w ewolucji jednowymiarowej (jedynie punkt (x_i, y_i, z_i) należy zastąpić jego rzutem na ℓ). Wiemy już, że w jednowymiarowym przypadku kolizja między dwiema parami punktów na ℓ jest niemożliwa, zatem i kolizja między o_i oraz o_j tak naprawdę nie może mieć miejsca.

Czy warto było wchodzić w czwarty wymiar? Osądźcie sami.

Asysta grawitacyjna – jak to obliczyć?

Przemysław BORYS*

*Wydział Chemiczny, Politechnika Śląska w Gliwicach



Rys. 1. Manewr asysty grawitacyjnej wokół planety. Planeta porusza się z prędkością U względem Słońca, a prędkość pojazdu względem Słońca jest równa v

O tym, że asysta grawitacyjna jest często wykorzystywana podczas rozpędzania pojazdów kosmicznych, słyszał zapewne każdy miłośnik astronautyki. Wiele sond kosmicznych, szczególnie tych skierowanych w odległe zakątki Układu Słonecznego, korzysta z tej metody powiększania prędkości. Technika ta jest doskonałym przykładem zastosowania orbit hiperbolicznych w astronomii (ściślej – w astrodynamice, nauce zajmującej się orbitami sztucznych pojazdów kosmicznych). Niestety, jej szczegóły rachunkowe nie są powszechnie omawiane w podręcznikach fizyki ogólnej czy nawet w podręcznikach astronomii – dlatego zajmiemy się nimi w poniższym artykule.

Podstawowa idea asysty grawitacyjnej wydaje się bardzo prosta. Na rysunku 1 widać, jak pojazd kosmiczny poruszający się z prędkością v wchodzi tymczasowo na orbitę planety poruszającej się z prędkością U . Porusza się wokół niej po półorbicie (180°) z prędkością $v + U$ względem planety, aby następnie opuścić ją z tą samą prędkością $v + U$ (względem planety), lecz w przeciwnym kierunku. Względem nieruchomego obserwatora – np. na Słońcu, prędkość ta będzie powiększona o prędkość planety U , dając $v + 2U$.

Wszystko pięknie, tylko... Jak to zrobić, żeby pojazd kosmiczny „częściowo” orbitował wokół planety? I jak kontrolować to, w którym miejscu pojazd wchodzi na orbitę, a w którym z niej wychodzi? Aby rozwiązać ten problem, musimy posłużyć się modelem orbit otwartych, a więc orbit hiperbolicznych (lub parabolicznych, ale w artykule skupimy się na tych pierwszych).

Kąt ugięcia trajektorii

Zajmiemy się najpierw wyznaczeniem kąta ugięcia trajektorii pojazdu kosmicznego. Wspomagając się rysunkiem 2, widzimy, że rzut prędkości na oś symetrii zmienia znak przy ugięciu i przechodzi od $v \cos(180^\circ - \theta_0)$ (zwróconego w kierunku prawego górnego rogu) do $-v \cos(180^\circ - \theta_0)$, gdzie v to długość wektorów v_{in} i v_{out} . Ponieważ $\cos(180^\circ - \theta_0) = -\cos \theta_0$, więc:

$$\Delta v = 2v \cos \theta_0.$$

Tę składową prędkości można również wyznaczyć z przyspieszenia, działającego w żądanym kierunku. Wówczas, korzystając z prawa grawitacji Newtona, w krótkim czasie δt prędkość zmienia się o δv dane wzorem:

$$\delta v = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta \delta t.$$

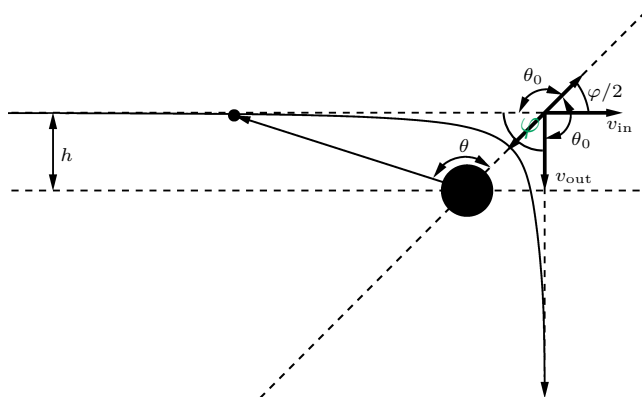
Aby uzyskać Δv , sumujemy infinitesimalne przyrosty δv dla możliwych wartości t :

$$\Delta v = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} -\frac{GM}{r^2} \cos \theta \delta t,$$

przy czym znak „-” wynika z faktu, że siła grawitacji działa w kierunku planety i zarazem odwrotnie do przyjętego kierunku prędkości (prawego górnego rogu rysunku).

Dla Czytelników, którzy nie znają metody całkowania, wyjaśniamy: podane wyrażenie opisuje pole pod wykresem funkcji $\cos \theta$, ograniczone przedziałem od $-\theta_0$ do θ_0 . Każdy składnik sumy to pole prostokąta o podstawie $\delta \theta$ i wysokości $\cos \theta$.

Zachęcamy także do samodzielnego wyprowadzenia tego faktu, z wykorzystaniem definicji pochodnej: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ oraz faktu, że pochodną funkcji sinus jest cosinus.



Rys. 2. Kąt ugięcia trajektorii pojazdu kosmicznego korzystającego z asysty grawitacyjnej

Sumowanie po czasie zamienimy teraz na łatwiejsze sumowanie po kącie θ . Wyrażmy najpierw przyrost czasu δt poprzez przyrost kąta: zakładając chwilową prędkość kątową ω , mamy $\delta t = \frac{\delta \theta}{\omega}$. Z mechaniki klasycznej dla ruchu centralnego moment pędu spełnia równość $J = I\omega = mr^2\omega$, co daje:

$$\omega = \frac{J}{mr^2} \implies \delta t = \frac{mr^2}{J} \delta \theta.$$

Podstawiając do wzoru na przyrost prędkości, dostajemy:

$$\delta v = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta \cdot \frac{mr^2}{J} \delta \theta = -\frac{GMm}{J} \cos \theta \delta \theta,$$

a po wysumowaniu po kącie θ :

$$\Delta v = \sum_{\theta=-\theta_0}^{+\theta_0} -\frac{GMm}{J} \cos \theta \delta \theta.$$

Dla bardzo małych $\delta \theta$ możemy skorzystać z faktu:

$$\lim_{\delta \theta \rightarrow 0} \sum_{\theta=-\theta_0}^{+\theta_0} \cos \theta \delta \theta = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos \theta d\theta = 2 \sin \theta_0,$$

co daje nam:

$$\Delta v \approx -\frac{2GMm}{J} \sin \theta_0.$$

W powyższym równaniu musimy jeszcze obliczyć moment pędu $\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Jest on zachowany w całej trajektorii i najłatwiej go wyznaczyć w dużej odległości od ciała niebieskiego, gdzie prędkość nie została jeszcze zmieniona przez grawitację. Po podstawieniu $r \sin \theta = h$ (odległość planety od asymptoty hiperboli) dostajemy $J = mvh$, a wzór na zmianę prędkości przechodzi w:

$$\Delta v = -\frac{2GM}{hv} \sin \theta_0.$$

Porównując z wcześniejszym wyrażeniem na zmianę prędkości:

$$2v \cos \theta_0 = -\frac{2GM}{hv} \sin \theta_0,$$

otrzymujemy zależność:

$$(*) \quad \operatorname{tg} \theta_0 = -\frac{hv^2}{GM}, \implies \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \frac{hv^2}{GM}.$$

Wartość φ to kąt ugięcia trajektorii pojazdu kosmicznego, a $\theta_0 = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}$ (rys. 2). Przesunięty tangens jest kotangensem z minusem, stąd wynik (*).

Maksymalne zbliżenie do planety

Parametr zderzenia h , tj. odległość, w jakiej „asymptotycznie” chcemy przelecieć obok planety, zawsze jest większy niż minimalna odległość, w jakiej pojazd kosmiczny mija planetę, na której podlega asysty grawitacyjnej. Aby uniknąć

20 DNI MAJÓW:





To równanie możemy również zapisać w bardziej zwartej formie, porównując je z równaniem hiperboli we współrzędnych biegunowych (patrz: dodatkowy materiał w wersji elektronicznej artykułu). Wówczas widzimy, że $r_{\min} = a(e - 1)$, przy czym $a = \frac{GM}{v_0^2}$ to połowa odległości między ogniskami hiperboli, natomiast $e = \sqrt{1 + \frac{v_0^4 h^2}{G^2 M^2}}$ to jej mimośród. Takie przedstawienie równania pozwala uniknąć błędów związanych z operowaniem bardzo rozbudowaną formułą.

zderzenia, warto zatem mieć możliwość obliczenia minimalnej odległości, na jaką pojazd zbliża się do planety. W tym celu zapisujemy:

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}.$$

Czyli: na energię pojazdu kosmicznego składa się jego energia kinetyczna związana z ruchem w kierunku planety (opisywana przez składową radialną prędkości v_r), energia ruchu obrotowego ($J^2/2mr^2$) oraz energia potencjalna grawitacji. Kiedy pojazd jest bardzo daleko od planety, jego energia potencjalna jest praktycznie równa zero, a więc jego energia i moment pędu dane są wtedy przez $E = mv^2/2$, $J = mvh$. Przy maksymalnym zbliżeniu składowa radialna prędkości jest równa zero i korzystając z zasad zachowania energii i zachowania momentu pędu (E i J są stałe), dostajemy:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mv^2 h^2 \frac{1}{r_{\min}^2} - \frac{GMm}{r_{\min}}, \quad v^2 r_{\min}^2 + 2GM r_{\min} - v^2 h^2 = 0,$$

i po rozwiązaniu równania kwadratowego:

$$r_{\min} = \frac{-GM}{v^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{v^4 h^2}{G^2 M^2}} \right) = \frac{GM}{v^2} \left(\sqrt{1 + \frac{v^4 h^2}{G^2 M^2}} - 1 \right).$$

Asysta grawitacyjna Voyagera 1 z 5 marca 1979 roku

Voyager 1 wykonał asystę grawitacyjną wokół Jowisza ($GM = 1,27 \cdot 10^8 \text{ km}^3/\text{s}^2$). Do planety podchodził z prędkością $v_0 = 10,8 \text{ km/s}$ (względem planety) i zbliżył się na odległość $3,48 \cdot 10^5 \text{ km}$. Kąt wektora prędkości sondy do wektora prędkości planety przed ugięciem wynosił $\varphi = 180^\circ - 63,8^\circ = 116,2^\circ$.

Zadanie: Obliczyć kąt ugięcia trajektorii oraz parametr zderzenia. Jakie były prędkości względem Słońca przed i po zderzeniu?

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć parametr zderzenia, korzystamy ze wzoru na marginesie

$$r_{\min} = a(e - 1):$$

$$a = \frac{GM}{v_0^2} = 1,09 \cdot 10^6 \text{ km} \implies e = \frac{r_{\min}}{a} + 1 = 1,319$$

$$\implies h = \frac{GM}{v_0^2} \sqrt{e^2 - 1} = 9,38 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Dysponując h (zwróćmy uwagę, że jest ono blisko 3 razy większe niż $r_{\min}$), łatwo obliczyć kąt ugięcia trajektorii φ z (*):

$$\varphi = 2 \arccos \left(\frac{hv_0^2}{GM} \right) = 98,6^\circ.$$

Aby określić prędkości względem Słońca przed (v_i) i po zderzeniu (v_f), rozkładamy prędkość w układzie planety na styczną i prostopadłą do prędkości planety i część styczną uzupełniamy o prędkość planety (12,83 km/s):

$$v_i = \sqrt{\underbrace{v_0^2 \sin^2 \varphi}_{\text{prędkość prostopadła}} + \underbrace{(v_0 \cos \varphi + 12,83 \text{ km/s})^2}_{\text{prędkość styczna}}} = 12,593 \text{ km/s},$$

$$v_f = \sqrt{\underbrace{v_0^2 \sin^2(\varphi - \Phi)}_{\text{prędkość prostopadła}} + \underbrace{(v_0 \cos(\varphi - \Phi) + 12,83 \text{ km/s})^2}_{\text{prędkość styczna}}} = 23,324 \text{ km/s}.$$

Parametry innych asyst dla Voyagera 1 i Voyagera 2

Na koniec, by dać możliwość dodatkowego przećwiczenia przedstawionej wiedzy, podajemy tabelę z danymi dotyczącymi manewrów sond Voyager 1 i Voyager 2.

Misja	$r_{\min}$ [km]	v_0 [km/s]	GM [km ³ /s ²]	v_B [km/s]	φ
Voyager 1, Jowisz	$3,48 \times 10^5$	10,8	$1,27 \times 10^8$	12,8	116°
Voyager 2, Jowisz	$7,21 \times 10^5$	7,62	$1,27 \times 10^8$	12,7	132°
Voyager 2, Saturn	$1,61 \times 10^5$	10,7	$3,79 \times 10^7$	9,59	$81,8^\circ$
Voyager 2, Uran	$1,07 \times 10^5$	14,7	$5,79 \times 10^6$	6,71	74°

Źródło: R.J. Cesarone (1989). W oryginalnym artykule kąty podawane były względem grotu prędkości planety, tu są przeliczone na kąt między wektorami zaczepionymi we wspólnym punkcie. Uwaga: prędkości planet wykazują różnice w różnych miejscach swojej orbity!

Literatura

1. R.J. Cesarone, „A gravity assist primer”, *AIAA Student Journal*, 1989.
2. R.R. Bate, D.D. Mueller, J.E. White, „Fundamentals of astrodynamics”, Dover, 1971.
3. J. Binney, S. Tremaine, „Galactic dynamics”, Princeton University Press, 2008.
4. N. Harnew, „Classical Mechanics: open orbits”, wykład, Oxford, 2017.
5. S. Charzyński, „Proca grawitacyjna”, *Delta* 7, 2014.
6. David (Hop) Hollister, „Conic Sections & Celestial Mechanics” Coloring Book (Az Publishing, 2011).