



Pęki harmoniczne

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Przed przystąpieniem do lektury zachęcam Czytelnika do zapoznania się z poprzednim odcinkiem.

Rozważmy konfigurację geometryczną z rysunku 1. Obliczając na dwa sposoby pola trójkątów AXS i BXS , otrzymujemy

$$\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{[AXS]}{[BXS]} = \frac{\frac{1}{2}ax \sin \alpha}{\frac{1}{2}bx \sin \beta} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}.$$

Analogicznie $\frac{|AY|}{|BY|} = \frac{a \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{b \sin \gamma} = \frac{a \sin \delta}{b \sin \gamma}$. Mamy więc równoważność:

$$\text{Odcinki } AB \text{ i } XY \text{ są harmonicznie sprzężone} \iff \sin \alpha \sin \gamma = \sin \beta \sin \delta.$$

Powyższa równość nie zależy od położenia prostej ℓ (nawet gdy przecina proste $\ell_A, \ell_X, \ell_B, \ell_Y$ w innej kolejności), więc jest ona własnością pęku. Wnioskujemy zatem, że każda prosta przecinająca te cztery w punktach kolejno A, X, B, Y , sprezentuje nam harmonicznie sprzężone odcinki AB i XY . Taki pęk czterech prostych nazywamy *pękiem harmonicznym*, a punkt S – jego środkiem.

Rozważania te należy uzupełnić o prostą ℓ równoległą do, powiedzmy, ℓ_Y – wówczas $Y = \infty$. W tej sytuacji harmoniczne sprzężenie odcinków AB i XY jest równoważne równości $|AX| = |BX|$. Z równoległości $\ell_Y \parallel \ell$ mamy $|\sphericalangle SAX| = \delta$ i $|\sphericalangle SBX| = \gamma$. Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABS mamy $a \sin \delta = b \sin \gamma$, skąd

$$\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta} \cdot \frac{b \sin \gamma}{a \sin \delta} = \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta \sin \delta}.$$

Dlatego $|AX| = |BX|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin \alpha \sin \gamma = \sin \beta \sin \delta$. W końcu wykazaliśmy:

Twierdzenie 1. *Przecięcie pęku pewną prostą daje parę odcinków harmonicznie sprzężonych wtedy i tylko wtedy, gdy przecięcie go każdą prostą daje parę odcinków harmonicznie sprzężonych.*

Na koniec jeszcze o pewnym szczególnym pęku harmonicznym. Na potrzeby kącika będę go nazywał *prostokątnym* (nie jest to nazwa oficjalna, ale mogłaby taką być), ponieważ pewne dwie proste należące do niego przecinają się pod kątem prostym (rys. 2). Poniższe twierdzenie szczegółowo opisuje tę konfigurację.

Twierdzenie 2. *Dany jest trójkąt ABS . Punkty X i Y leżą na prostej AB . Jeśli spełnione są pewne dwa z poniższych warunków, to zachodzi także trzeci:*

- odcinki AB i XY są sprzężone harmonicznie;
- kąt $XS Y$ jest prosty;
- prosta SX jest dwusieczną kąta ASB .

Dowód. Załóżmy najpierw, że zachodzą warunki (b) i (c). Prosta SY jest dwusieczną kąta zewnętrznego ASB , więc odcinki AB i XY są sprzężone harmonicznie na mocy twierdzenia 2(3) z poprzedniego kącika. Załóżmy teraz, że zachodzi (a) – pokażemy, że wówczas (b) i (c) są równoważne, czym zakończymy dowód twierdzenia. Poprowadźmy prostą ℓ' prostopadłą do SX , przecinającą proste AS, BS, XS, YS w punktach, odpowiednio, A', B', X', Y' . Zachodzą następujące równoważności:

$$|\sphericalangle XS Y| = 90^\circ \iff Y' = \infty \iff |X'A'| = |X'B'| \iff |\sphericalangle ASX| = |\sphericalangle BSX|.$$

1. Odcinki PQ i RS są harmonicznie sprzężone (twierdzenie 2(1)). Mamy $|\sphericalangle PQR| = |\sphericalangle RKS| = 90^\circ$, więc wystarczy zastosować twierdzenie 2(3). Niech prosta EF przecina proste BC i AD w punktach odpowiednio F i E . Odcinki BC i AD są harmonicznie sprzężone (twierdzenie 2(2) z poprzedniego kącika), a więc EF i ZY również są harmonicznie sprzężone (twierdzenie 1). Teraz wystarczy zauważyć, że proste DF, DZ, DE, DY tworzą prostokątny pęk harmoniczny i zastosować twierdzenie 2(3). Niech K będzie przecięciem prostych AB i DE . Na mocy twierdzenia Cevy odcinki AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie, więc AB i KF są harmonicznie sprzężone. Ponadto trójkąty AEP i AFP są przystające. Korzystając dodatkowo z twierdzenia o dwusiecznej, możemy więc napisać: $\frac{|PF|}{|BF|} = \frac{|EP|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|PK|}{|BK|}$. Pozostaje skorzystać z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o dwusiecznej. 4. Niech R będzie punktem przecięcia AQ i PT (dopuszczamy $R = \infty$). Odcinki AB i NP są harmonicznie sprzężone (zadanie 1(b) z poprzedniego kącika), zatem również odcinki TP i MR są harmonicznie sprzężone – więc $R = \infty$.

Wskazówki do zadań

Zadania

- Dany jest trapez $ABCD$. Punkty P i Q są środkami podstaw, odpowiednio, AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie R , a przedłużenia ramion – w punkcie S . Okręgi o średnicach PQ i RS przecinają się w punktach K i L . Udowodnić, że $|\sphericalangle QKR| = 45^\circ$.
- Punkt X leży na wysokości AD trójkąta ABC . Proste BX i CX przecinają, odpowiednio, odcinki AC i AB w punktach E i F . Udowodnić, że prosta AD jest dwusieczną kąta EDF .

- Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinków BC, CA, AB w punktach, odpowiednio, D, E, F . Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek DE w punkcie P . Wykazać, że $AP \perp BP$.
- Dany jest okrąg ω o średnicy AB . Punkt P leży na prostej AB , przy czym punkt B znajduje się na odcinku AP . Na okręgu ω wybrano taki punkt T , by prosta PT była do tego okręgu styczna. Punkt M jest środkiem odcinka PT , a punkt N jest rzutem prostopadłym punktu T na odcinek AB . Proste NT i BM przecinają się w punkcie Q . Dowieść, że $AQ \parallel PT$.