



Wielomiany symetryczne

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Zachęcam Czytelnika, aby powrócił na chwilę do kącika nr 2 w Δ_{19}^2 – są tam definicje kilku podstawowych pojęć, występujących również w niniejszym tekście.

Przez S_n będę oznaczał zbiór wszystkich permutacji ciągu $(1, 2, \dots, n)$. Rozważmy wielomian

$$(W) \quad W_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} x_{\sigma(2)}^{\alpha_2} \dots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n}.$$

Zwróćmy uwagę, że permutujemy tu zmienne, pozostawiając wykładniki na swoich miejscach – można też na odwrót. Na użytek tego kącika, jeśli jest jasne, jakie zmienne występują, będę używał następujących zapisów:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n),$$

$$W_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]$$

Z samej definicji wynika, że wielomian (W) jest symetryczny. Co więcej, z dokładnością do stałej jest to „najmniejszy” wielomian symetryczny, w którym występuje składnik $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n)$.

Więcej światła powinien rzucić przykład:

$$\begin{aligned} W_{2,1,1}(x, y, z) &= x^2 y^1 z^1 + y^2 z^1 x^1 + z^2 x^1 y^1 + z^2 y^1 x^1 + y^2 x^1 z^1 + x^2 z^1 y^1 \\ &= 2x^2 yz + 2y^2 zx + 2z^2 xy. \end{aligned}$$

Mamy tu sumę sześciu jednomianów, bo $6 = 3!$, ale niektóre są równe. Co więcej, po uporządkowaniu wszystkie jednomiany mają ten sam współczynnik. To nie jest przypadek. Niech w ciągu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ będzie n_0 zer, n_1 jedynek, n_2 dwójek itd. Wówczas wspólnym

współczynnikiem jednomianów po uporządkowaniu wielomianu (W) jest $n_0! \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \dots$, czego wykazanie pozostawiam Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie z kombinatoryki.

Skoro w wielomianie (W) wszystkie współczynniki są równe, rozpatruje się czasem unormowaną jego wersję, w której wszystkie współczynniki są jedynkami:

$$(M) \quad M_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]}{n_0! \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \dots}.$$

Jednymi z najważniejszych wielomianów symetrycznych są elementarne wielomiany symetryczne

$$(E) \quad E_k(x_1, \dots, x_n) = M_{1, \dots, 1, 0, \dots, 0}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$$

(w indeksie M jest dokładnie k jedynek). Pojawiają się one między innymi we wzorach Viete’a. W szczególności prawdziwa jest równość

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) = 1 - E_1 + E_2 - E_3 + \dots + (-1)^n E_n.$$

A na koniec pomnożymy wielomiany takie jak (W). Powiedzmy, że jeden z nich jest sumą k jednomianów, a drugi – l jednomianów, więc, mnożąc tradycyjnie, trzeba wykonać kl mnożeń (a liczby k i l mogą być równe n !). Poniższa równość pozwala zmniejszyć liczbę mnożeń do $\min\{k, l\}$:

$$\begin{aligned} [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n] \cdot [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n] &= \sum_{\sigma, \tau \in S_n} (\alpha_{\sigma(1)+\beta_{\tau(1)}} \ \alpha_{\sigma(2)+\beta_{\tau(2)}} \ \dots \ \alpha_{\sigma(n)+\beta_{\tau(n)}}) \\ &= \sum_{\rho \in S_n} [\alpha_1+\beta_{\rho(1)} \ \alpha_2+\beta_{\rho(2)} \ \dots \ \alpha_n+\beta_{\rho(n)}]. \end{aligned}$$

Jako przykład obliczymy $[2110] \cdot [1100]$:

+	1100	1010	1001	0110	0101	0011
2110	3210	3120	3111	2220	2211	2121

To tylko 1/4 pełnej tabeli mnożenia przez (2110) , pozostałe trzy części są takie same. Otrzymujemy więc

$$[2110] \cdot [1100] = 8[3210] + 8[2211] + 4[3111] + 4[2220].$$

Zadania

- Wykazać, że każdy wielomian symetryczny zmiennych x i y można otrzymać z wielomianów $x + y$ oraz xy , za pomocą dodawania i mnożenia wielomianów oraz mnożenia przez stałą.
- Wiedząc, że

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b, \quad x^3 + y^3 + z^3 = c,$$

znaleźć wielomian sześcienny, którego pierwiastkami są x, y, z .

- Niech $a, b, c, d \neq 0, 1$ będą liczbami rzeczywistymi. Udowodnić, że jeśli

$$a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 2,$$

to również $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d} = 2$.

Wskazówki do zadań

1. Dla $a \leq b$ mamy $x^a y^b = x^a (x^b + y^b - x^b) = x^a y^b + x^a (y^b - x^b)$, więc wystarczy przeprowadzić dowód dla wielomianów postaci $x^c + y^c$.

Ciekawostka. Jest to szczególnie przydatne zasada twierdzenia o wielomianach symetrycznych, wedle którego wszystkie wielomiany symetryczne n zmiennych można wygenerować z wielomianów $E_1, E_2, \dots, E_n$.

2. Z równości $a = E_1, b = E_2$ oraz $c = E_1^3 - 3E_1E_2 + 3E_3$ wyznaczyć E_3 z E_1, E_2 za pomocą a, b, c .

3. $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d} = 2$ oraz $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d} = 2$ można przekształcić do postaci $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d} = 2$.