

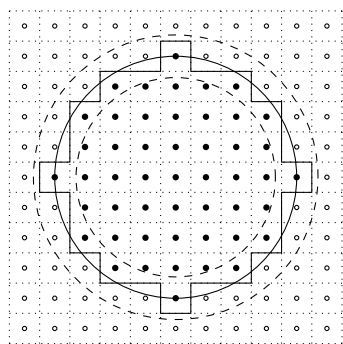
Pola i punkty kratowe

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki UW



Carl Friedrich Gauss (1777–1855)



Rys. 1. Okrąg $C(4)$ i okręgi $C(4 \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$ pomagające oszacować liczbę punktów kratowych

$r = \sqrt{n}$	$N(n)$	$N(n)/n$
1	5	5
2	13	3,25
3	29	3,22
4	49	3,06
5	81	3,24
6	113	3,14
7	149	3,04
8	197	3,08
9	253	3,12
10	317	3,17
20	1257	3,14
30	2821	3,13
100	31417	3,1417
200	125629	3,1407
300	282697	3,1411

Rys. 2

$r = \sqrt{n}$	$N(n)$	$N(n)/n \approx \pi$
400	502 625	3,14141
500	785 349	3,14139
1 000	3 141 549	3,141549
10 000	314 159 221	3,141592
100 000	31 415 939 281	3,141594
200 000	125 663 759 077	3,141594

Rys. 4

W artykule *Obliczenia pól i objętości – trzy metody geometryczne*, Δ_{25}^2 , opisaliśmy trzy geometryczne sposoby obliczania pól figur płaskich. Celem tego artykułu jest pokazanie, jak można aproksymować pole koła o promieniu $r = \sqrt{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną, za pomocą zliczania punktów kratowych zawartych w tym kole i na jego brzegu. Pokażemy także, że w przypadku wielokątów o wierzchołkach w punktach kratowych znajomość liczby punktów kratowych w ich wnętrzach i na ich brzegach wystarcza do dokładnego obliczenia pól tych wielokątów.

Obliczenia dla okręgu. Oznaczmy przez $N(n)$ liczbę punktów kratowych na i wewnątrz okręgu $C(\sqrt{n})$ o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = \sqrt{n}$ (patrz rys. 1).

Jednym z pierwszych uczonych, którzy postawili pytanie o wartość $N(n)$, był Carl Friedrich Gauss. W roku 1837 napisał na ten temat artykuł. Podał w nim swoje obliczenia dla naturalnych r w zakresie od 1 do 300, patrz tabela na rysunku 2. Z tabeli możemy wywnioskować, że wartości $\frac{N(n)}{n}$ dążą do liczby π , gdy n rośnie nieograniczenie. Aby to pokazać, oszacujemy najpierw różnicę $|N(n) - \pi n|$. Skoro $N(n)$ jest równe sumie pól kwadratów, których środki leżą na i wewnątrz okręgu $C(\sqrt{n})$, to jest jasne (patrz rys. 1), że

$$\pi \left(\sqrt{n} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \leq N(n) \leq \pi \left(\sqrt{n} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2,$$

skąd wynika, że

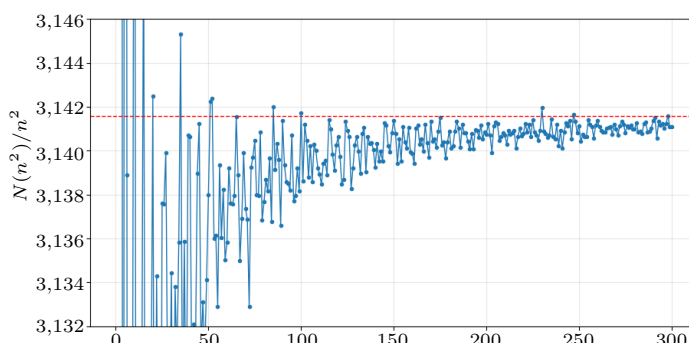
$$(1) \quad \left| \frac{N(n)}{n} - \pi \right| \leq \pi \left(\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{1}{2n} \right).$$

Prawa strona ostatniej nierówności dąży do zera wraz z nieograniczonym wzrostem n . Powyższą nierówność możemy odczytać jako

$$\left| \frac{N(n) - \pi n}{\pi n} \right| \leq \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{1}{2n},$$

co oznacza, że wartość względna (w stosunku do pola koła o promieniu $\sqrt{n}$) różnicy pomiędzy liczbą punktów kratowych w tym kole, razem z jego brzegiem, a polem tego koła dąży do zera wraz ze wzrostem promienia tego koła. Wartość względna tej różnicy jest rzędu $\frac{1}{\sqrt{n}}$, czyli odwrotności promienia koła.

Na podstawie tabeli z rysunku 2 można obliczyć tę różnicę z dużą dokładnością, biorąc np. za liczbę π jej przybliżenie Archimedesowe $\frac{22}{7}$.



Rys. 3. Ilustracja zbieżności $N(n^2)/n^2 \rightarrow \pi$

Wykres na rysunku 3 pokazuje, w jaki sposób $\frac{N(n^2)}{n^2}$ zbliża się do liczby π wraz ze wzrostem r w zakresie $0 < r \leq 300$. Tabela na rysunku 4 pokazuje wyliczenia dla większych wartości r .

Nasuują się dwa pytania.

- Czy istnieją wzory określające $N(n)$ w zależności od n ?
- Czy może istnieć figury płaskie, dla których liczba punktów kratowych leżących w ich wnętrzu i na ich brzegu wyraża nie tylko w przybliżeniu, ale – poprzez konkretną formułę – dokładnie pola tych figur?

Podłoga $\lfloor x \rfloor$ liczby x to największa liczba całkowita nie większa od x .

Przykładowe wartości $N(n)$:

$$\begin{aligned} N(0) &= 1 \\ N(1) &= 1 + 4 = 5 \\ N(2) &= 1 + 4 \cdot 2 = 9 \\ N(3) &= 1 + 4 \cdot 3 - 4 = 9 \\ N(4) &= 1 + 4 \cdot 4 - 4 = 13 \end{aligned}$$

Na oba te pytania odpowiedź jest pozytywna. Odpowiedzią na pytanie (i) jest **formuła Gaussa**:

$$(2) \quad N(n) = 1 + 4 \left(\lfloor n \rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + \dots \right),$$

gdzie $\lfloor \cdot \rfloor$ jest funkcją podłogi. Łatwo stąd wyznaczyć bezpośrednio wartości dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (na marginesie). Z równości $N(2) = N(3)$ możemy wywnioskować, że na okręgu $C(\sqrt{3})$ nie ma żadnych punktów kratowych, a z tego, że $N(4) - N(3) = 4$, wynika, że na okręgu $C(\sqrt{4})$ jest ich 4.

Zanim przejdziemy do dowodu wzoru Gaussa, wykażemy jedną z jego konsekwencji, słynny **wzór Leibniza**:

$$(3) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Załóżmy, że $\sqrt{n}$ jest liczbą naturalną nieparzystą.

Napiszmy wzór Gaussa (2) w postaci:

$$\frac{1}{4}(N(n) - 1) = \lfloor n \rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \dots \pm \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{n}} \right\rfloor \pm \theta \sqrt{n},$$

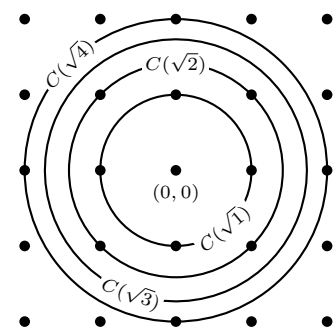
gdzie θ jest ułamkiem właściwym. Korzystamy tu z tego, że szereg jest naprzemienny, a moduły jego wyrazów tworzą ciąg nierosnący. Wtedy moduł reszty szeregu jest nie większy od modułu pierwszego odrzuconego wyrazu, czyli $\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{n}+2} \right\rfloor$. Liczba ta jest mniejsza od liczby naturalnej $\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{n}} \right\rfloor = \sqrt{n}$, można ją zatem zapisać jako $\theta \sqrt{n}$, gdzie θ jest jak wyżej.

Następny krok to zastąpienie funkcji podłogi ułamka samym ułamkiem. Ponieważ $\frac{k}{n} - \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \leq 1$, a liczba zachowanych wyrazów szeregu jest równa $\frac{\sqrt{n}+1}{2} < \sqrt{n}$, więc

$$\frac{1}{4}(N(n) - 1) = n - \frac{n}{3} + \frac{n}{5} - \frac{n}{7} + \dots \pm \frac{n}{\sqrt{n}} \pm \theta \sqrt{n} \pm \theta' \sqrt{n},$$

gdzie θ' jest także ułamkiem właściwym. Dzieląc teraz obie strony przez n , otrzymujemy

$$\frac{1}{4n}(N(n) - 1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \pm \frac{\theta}{\sqrt{n}} \pm \frac{\theta'}{\sqrt{n}}$$



Rys. 5. Punkty kratowe na okręgach o promieniach $\sqrt{n}$ dla $n = 1, 2, 3, 4$

Na przykład dla $n = 10$ wśród liczb $1, 2, \dots, 10$ mamy trzy będące postaci $4k + 1$: 1, 5, 9. Przez 1 dzielą się wszystkie z powyższej dziesiątki, $10 = \left\lfloor \frac{10}{1} \right\rfloor$, przez 5 dzielą się dwie, $2 = \left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor$, przez 9 dzieli się tylko jedna, $1 = \left\lfloor \frac{10}{9} \right\rfloor$. Przy tym $\left\lfloor \frac{10}{13} \right\rfloor$ i wszystkie następne wyrazy szeregu $\left\lfloor \frac{10}{13} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{13} \right\rfloor + \dots$ są równe zero.

dla liczb n przebiegających ciąg kwadratów liczb nieparzystych.

Biorąc pod uwagę zbieżność $\frac{N(n)}{n} \rightarrow \pi$ wynikającą z oszacowania (1) i zbiegając z n do nieskończoności, dostajemy wzór Leibniza (3).

Przejdźmy teraz do dowodu formuły Gaussa. Jeśli przez $R(n)$ oznaczymy liczbę punktów kratowych na okręgu $C(\sqrt{n})$, to $N(n) = R(0) + R(1) + \dots + R(n)$. Znając wartości $R(k)$ dla poszczególnych k , możemy obliczyć $N(n)$, i taka też była droga odkrycia powyższej formuły Gaussa. Rzecz sprowadza się zatem do pytania o liczbę pierwiastków całkowitych a, b równania

$$(4) \quad a^2 + b^2 = n$$

dla danej liczby naturalnej n . Mamy następujące:

Twierdzenie 1 (za [Hilbert, 1956]). *Liczba przedstawień liczby całkowitej n jako sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych jest równa czterokrotności różnicy liczby dzielników liczby n o postaci $4k + 1$ i liczby dzielników o postaci $4k + 3$.*

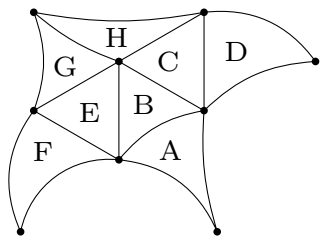
Dla przykładu $R(3) = N(3) - N(2) = 0$. Liczba pierwsza 3 ma jedynie dzielniki 1 i 3, więc na mocy powyższego twierdzenia $R(3) = 4(1 - 1) = 0$. Dalej: $R(4) = N(4) - N(3) = 4$. Wśród dzielników liczby 4 (czyli 1, 2, 4) nie ma dzielników postaci $4k + 3$, więc z twierdzenia otrzymujemy $R(4) = 4(1 - 0) = 4$. I rzeczywiście, na okręgu $C(\sqrt{4})$ mamy cztery punkty kratowe, $(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2)$, będące całkowitymi rozwiązaniami równania $a^2 + b^2 = 4$ (patrz rys. 5).

Bezpośrednie wykorzystanie Twierdzenia 1 dla obliczenia kolejnych $R(n)$, a następnie równości $N(n) = R(0) + R(1) + \dots + R(n)$ dla obliczenia $N(n)$ byłoby niezmiernie żmudne dla dużych n . Jest jednak dużo prostszy sposób obliczenia $N(n)$. Najpierw obliczamy liczbę dzielników postaci $4k + 1$ dla wszystkich liczb naturalnych m nieprzekraczających n i od tej liczby odejmujemy liczbę dzielników postaci $4k + 3$, też dla wszystkich $m \leq n$, otrzymując:

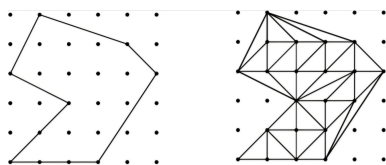
$$\left(\lfloor n \rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{13} \right\rfloor + \dots \right) - \left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + \dots \right)$$

Mnożąc powyższe wyrażenie przez 4 i dodając do niego jedynkę odpowiadającą punktowi kratowemu $(0, 0)$, po przegrupowaniu wyrazów, otrzymujemy formułę (2). Bardziej formalne ujęcie rozważań przedstawionych w punkcie (i) można znaleźć w artykule Deltowym Michała Krycha [Krych, 2019].

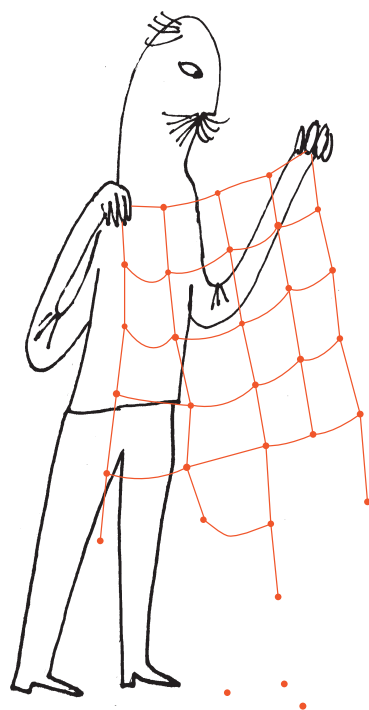
Obliczenia dla wielokątów. Przejdźmy do pytania (ii) o dokładne wyznaczenie pola za pomocą zliczania punktów kratowych. Jedną z możliwych odpowiedzi na to pytanie jest następujące twierdzenie z 1899 roku:



Rys. 6. Dołączając jeden wierzchołek i dwie krawędzie do obszaru A, otrzymujemy obszar B i mamy $3 + 2 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 3$. Dochodzimy w ten sposób do $15 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 9 - 3$ dla sumy pierwszych siedmiu obszarów. Na koniec dołączamy jedną krawędź zewnętrzną, jeden wierzchołek zewnętrzny staje się wtedy wierzchołkiem wewnętrznym i mamy $16 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 8 - 3$ dla całej figury



Rys. 7. Pole figury po lewej stronie obliczone ze wzoru (5) jest równe $A = 11 + \frac{1}{2}10 - 1 = 15$. Po prawej stronie jedna z triangulacji tej figury. Każdy z 30 trójkątów podstawowych ma pole równe $\frac{1}{2}$



Twierdzenie Picka. Pole dowolnego prostego wielokąta P , którego wierzchołkami są punkty kratowe, jest dane wzorem

$$(5) \quad A = W + \frac{1}{2}B - 1,$$

gdzie W jest liczbą punktów kratowych wewnątrz P , a B jest liczbą punktów kratowych na brzegu P , wliczając wierzchołki.

Twierdzenie Picka łączy geometryczną teorię liczb z mierzeniem pól, czyli, jak sama nazwa wskazuje, z klasyczną geometrią. Sama jego natura jest jednakże topologiczna. Aby to zobaczyć, rozważymy prostszą, ale ogólniejszą sytuację. Niech G będzie figurą płaską, złożoną z segmentów trójkątopodobnych o tym samym polu d , tak jak to widać na rysunku 6. Oznaczmy liczbę jej wierzchołków wewnętrznych przez W , zewnętrznych przez B , liczbę krawędzi przez K , a pole figury G przez A . Przypomnijmy ponadto równość Eulera: $V - E + F = 1$, gdzie V , E i F to, odpowiednio, liczby wierzchołków, krawędzi i ścian grafu narysowanego na płaszczyźnie bez przecinających się krawędzi.

W naszej sytuacji $V = W + B$, $F = \frac{A}{d}$ i $E = K$. Pokażemy, że $K = 3W + 2B - 3$. Rzeczywiście wzór ten zachodzi dla pojedynczego obszaru trójkątopodobnego, gdyż mamy wtedy $K = 3$, $W = 0$, $B = 3$ i $3 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 3$. Jeśli do tego obszaru dołączymy podobny, przylegający do niego element naszej wyjściowej figury, to prawdziwość tego wzoru się nie zmieni, i tak będzie aż do ułożenia całej figury – rysunek 6 ilustruje, w jaki sposób dodawać kolejne obszary. Wstawiając teraz postać V , E i F do równości Eulera, dostaniemy

$$A = 2dW + dB - 2d.$$

Dla $d = \frac{1}{2}$ otrzymujemy stąd równanie (5).

Dla dowodu twierdzenia Picka wystarczy pokazać, po pierwsze, że każdy obszar z założeń tego twierdzenia można rozłożyć na trójkąty podstawowe, to znaczy niezawierające punktów kratowych w swoich wnętrzach ani na swoich bokach (z wyjątkiem wierzchołków) – dowód tej własności pomijamy, po drugie, że pole każdego trójkąta podstawowego jest równe $\frac{1}{2}$ i po trzecie, że dla całego obszaru zachodzi równość $K = 3W + 2B - 3$.

To, że pole każdego trójkąta podstawowego jest równe $\frac{1}{2}$, wynika z rozumowania użytego dla dowodu nierówności (1). Każdy trójkąt podstawowy można uzupełnić do równoległoboku niemającego punktów kratowych w swoim wnętrzu ani na krawędziach, a więc równoległoboku generującego siatkę opartą na punktach kratowych. Załóżmy, że pole równoległoboku siatki jest równe α . Wykorzystując otrzymaną siatkę do aproksymacji pola koła, podobnie jak powyżej, otrzymujemy:

$$\left| \alpha \frac{N(n)}{n} - \pi \right| \leq \frac{4D\pi}{\sqrt{n}},$$

gdzie D jest średnicą równoległoboku siatki. Jako że $\frac{N(n)}{n} \rightarrow \pi$ wraz ze wzrostem n , to $\alpha = 1$, a stąd $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

Dowód równości $K = 3W + 2B - 3$ dla obszaru wielobocznego przeprowadzamy jak powyżej, dobudowując kolejne trójkąty podstawowe.

Warto porównać przedstawiony schemat dowodu twierdzenia Picka z dowodem Cauchy'ego równania Eulera dla wielościanów [Lakatos, 2005, str. 28–32], aby zdać sobie sprawę z czyhających pułapek natury topologicznej w trakcie dowodzenia metodą triangulacji. Na temat twierdzenia Picka, rozmaitych jego dowodów i uogólnień istnieje obszerna literatura. O powiązaniu tego twierdzenia z równaniem Eulera przeczytać można np. w [Detemple, 1974]. Ciekawe fizyczne intuicje związane z twierdzeniem Picka przedstawił Jarosław Górnicki w artykule „Wodny” dowód twierdzenia Picka (Δ_{24}^{12}).

Bibliografia

- [Bagdasaryan, 2025] V. Bagdasaryan, G. Łukasiewicz, *Obliczenia pól i objętości – trzy metody geometryczne*, Δ_{25}^2 .
[Detemple, 1974] D. Detemple, J. M. Robertson, *The equivalence of Euler's and Pick's theorems*, The Mathematics Teacher, Vol. 67, No. 3 (March 1974), pp. 222–226.
[Górnicki, 2024] J. Górnicki, „Wodny” dowód twierdzenia Picka, Δ_{24}^{12} .

- [Hilbert, 1956] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometria Poglądowa*, PWN, 1956.
[Krych, 2019] M. Krych, *Szereg Leibniza i punkty kratowe*, Δ_{19}^1 .
[Lakatos, 2005] I. Lakatos, *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, Tikkun, 2005.
[Olds, 2001] C. D. Olds A. Lax, G. P. Davidoff *The Geometry of Numbers*, The Mathematical Association of America, 2001.