

Rzeczywiście zespolona?

Patryk MICHALSKI*

* Student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

O rozważaniach teoretycznych, które umożliwiły eksperymentalne potwierdzenie *indeterminizmu* (czyli nieprzewidywalności) kwantowych zjawisk, można przeczytać w Δ_{01}^5 oraz w Δ_{21}^2 .

Dowolną liczbę zespoloną można zapisać w postaci $z = a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Widać stąd, że istnieje jednoznaczna odpowiedniość między liczbami zespolonymi a parami liczb rzeczywistych. Sprzężeniem zespolonym liczby z nazywamy $\bar{z} = a - ib$. Zwięźle i elegancko wprowadzenie do liczb zespolonych przedstawił Marek Kordos w Δ_{17}^{12} .



Równo wiek temu nastąpiło wielkie wzmoczenie pracy wybitnych umysłów, które po kilku latach twórczego fermentu zaowocowało powstaniem mechaniki kwantowej w formie, jaką znamy dziś. Nowa teoria wymierzyła liczne ciosy „zdrawemu rozsądkowi”, sprowadzając na manowce nawet postaci pokroju Alberta Einsteina. Szczególnie silny zgrzyt z utartymi klasycznymi intuicjami – budzący głęboki niepokój twórcy teorii względności – wywołała zasada głosząca, że wynik pojedynczego pomiaru kwantowego nie jest przez nic z góry określony: można przewidzieć jedynie *prawdopodobieństwo* otrzymania danego wyniku. Spór dotyczący tej kwestii sprowadzał się w gruncie rzeczy do pytania, czy nasz świat jest, czy też nie jest deterministyczny – i został całkiem niedawno rozstrzygnięty na korzyść mechaniki kwantowej dzięki słynnym nierównościom Bella. Zdrowy rozsądek jak zwykle okazał się – cytując Einsteina – „zbiorem przesądów nabytych w dzieciństwie”.

Jeszcze inny problem nurtował twórców mechaniki kwantowej już u jej zarania, choć szybko o nim zapomniano. Dotyczył on pewnego szczególnego obiektu, który zdawał się nierozzerwalnie spleciony z matematyczną maszyną teorii, lecz zniknął, gdy tylko docierano w obliczeniach do wielkości, które *rzeczywiście* da się zmierzyć. Tak pisał o tym Erwin Schrödinger w liście do Hendrika Lorentza z 6 czerwca 1926 roku [1]:

„Najbardziej rażące – i zasługujące na bezpośredni sprzeciw – jest tutaj użycie liczb zespolonych”.

Liczb zespolone to osobliwe stworzenia. Powstają jako rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych poprzez „dorzucenie” do niego *jednostki urojonej*, której kwadrat z definicji jest równy minus jeden: $i^2 = -1$. Jak sama nazwa wskazuje, na pierwszy rzut oka trudno tę wielkość odnieść do jakichkolwiek przyziemnych ludzkich doświadczeń. Dlaczego więc pojawia się w modelu opisującym rzeczywistość?

Trzeba zaznaczyć, że fizycy poznali liczby zespolone (i zaczęli je darzyć szczególnym uczuciem) na długo przed kwantowym przełomem. Sęk w tym, że w ramach klasycznych teorii służyły one wyłącznie jako potężne narzędzie ułatwiające rachunki. Bez liczb zespolonych klasyczna XIX-wieczna fizyka też by sobie poradziła – tylko potrzebowałaby do tego trochę więcej papieru. Z mechaniką kwantową było inaczej. Jednostka urojona wprosiła się do najbardziej fundamentalnych równań i nikt nie znalazł prostego sposobu, by się jej stamtąd pozbyć. Początkowe oburzenie Ojców Założycieli minęło jednak, gdy nowa teoria zaczęła osiągać pierwsze doniosłe sukcesy, a tym samym okazała się bardzo użytecznym narzędziem. Temat czekał, zamieciony pod dywan, budząc przez długi czas jedynie śladowe zainteresowanie środowiska naukowego.

Sytuacja zmieniła się pięć lat temu, gdy grupa fizyków pod kierunkiem Miguela Navascuésa rzuciła nieco światła na pytanie o rolę liczb zespolonych w kwantomechanicznym formalizmie [2]. Pokazali oni, że przyjmując pewne standardowe założenia dotyczące matematycznej struktury teorii, żadna alternatywna wersja mechaniki kwantowej oparta wyłącznie na liczbach rzeczywistych nie jest w stanie odtworzyć wszystkich przewidywań wersji zespolonej. Co więcej, zaproponowali schemat umożliwiający eksperymentalne sprawdzenie, która wersja jest tą właściwą. Zanim jednak pochylimy się nad pomysłami stojącymi za tym wynikiem, przyjrzyjmy się bliżej, jak liczby zespolone pojawiają się w opisie kwantowych zjawisk – i jaką taktykę można by przyjąć, żeby się ich pozbyć.

Przywołamy najpierw najważniejszy spośród wspomnianych wyżej standardowych postulatów leżących u podstaw mechaniki kwantowej. Zgodnie z nim dowolnemu układowi fizycznemu przyporządkować można zbiór $\mathcal{H}$ złożony z wektorów, który nazywa się *przestrzenią Hilberta*. W zbiorze $\mathcal{H}$ zdefiniowane

Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ oznaczamy jako $\langle \phi | \psi \rangle$. Działanie to ma następujące własności:

- $\langle \phi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \phi \rangle}$,
- Dla $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ zachodzi $\langle \phi | \psi \rangle = c_1 \langle \phi | \psi_1 \rangle + c_2 \langle \phi | \psi_2 \rangle$.



Rozważmy dwie pary wektorów: $\phi_1, \psi_1 \in \mathcal{H}_1$ oraz $\phi_2, \psi_2 \in \mathcal{H}_2$. Wówczas iloczyn skalarny wektorów $\phi_1 \otimes \phi_2$ oraz $\psi_1 \otimes \psi_2 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ jest zdefiniowany jako $\langle \phi_1 | \psi_1 \rangle \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle$.

Przykładowo przestrzeń Hilberta dwóch spoczywających elektronów ma zespolony wymiar cztery w konwencjonalnej teorii, a szesnaście (a nie osiem!) w przypadku modyfikacji używającej wyłącznie liczb rzeczywistych. W drugim wypadku dysponujemy więc zbyt dużą liczbą parametrów rzeczywistych, w porównaniu ze standardową zespoloną mechaniką kwantową.

jest działanie nazywane *iloczynem skalarnym*, które „połyka” dowolne dwa wektory, a „wypluwa” liczbę. Każdy stan kwantowy układu jest reprezentowany przez wektor należący do przestrzeni $\mathcal{H}$, którego iloczyn skalarny z samym sobą wynosi jeden (o takim wektorze mówimy, że jest *znormalizowany*). W wektorze stanu zakodowane są informacje pozwalające wyznaczyć prawdopodobieństwa wyników dowolnego pomiaru. Istotny punkt: składowe wektorów stanu mogą być albo liczbami zespolonymi, albo rzeczywistymi – zależnie od rozpatrywanej wersji teorii. Przyjmijmy na razie, że to jedyne, czym obie wersje mogą się od siebie różnić.

Weźmy teraz pod lupę najprostszy kwantowy układ – spoczywający elektron. Doświadczenia przeprowadzone w 1922 roku przez Otto Sterna i Waltera Gerlacha wykazały, że każdy elektron posiada wewnętrzny moment pędu nazywany *spinem*. O ile klasyczny moment pędu wynika z ruchu obrotowego, tak spin jest po prostu „wbudowaną” własnością cząstki, jak na przykład ładunek elektryczny. Żeby było ciekawiej, jeśli zmierzmy spin elektronu wzdłuż dowolnie wybranej osi, to możemy uzyskać tylko dwa wyniki: albo spin skierowany jest „w górę”, albo „w dół”, nic pomiędzy. Naturalne jest więc założyć, że przestrzeń Hilberta takiego elektronu ma bazę złożoną z dwóch wektorów, które odpowiadają dwóm możliwym stanom. Dowolny wektor stanu da się przedstawić jako znormalizowaną kombinację wektorów bazowych – fachowo nazywa się to *superpozycją*. Wiemy poza tym, że każdy wektor stanu powinien umożliwić wyznaczenie prawdopodobieństwa uzyskania wyniku „w górę” lub „w dół” wzdłuż dowolnej z trzech osi współrzędnych, a do tego potrzeba trzech rzeczywistych parametrów.

Policzmy, ile parametrów można zakodować w wektorze stanu w obydwu wariantach teorii. W wersji zespolonej dwie składowe dają cztery parametry rzeczywiste (każda liczba zespolona to dwa parametry), jeden odpada przez normalizację, więc zostają trzy parametry – dokładnie tyle, ile trzeba. Ale jeśli wektor ma rzeczywiste składowe, to... jesteśmy zgubieni – po uwzględnieniu normalizacji zostaje tylko jeden parametr rzeczywisty! To za mało. Bez kombinowania nie da się opisać spinu elektronu tylko za pomocą liczb rzeczywistych.

Widać wyraźnie, że alternatywna wersja mechaniki kwantowej wykorzystująca wyłącznie liczby rzeczywiste musi opisywać spoczywający elektron przy użyciu przestrzeni Hilberta, która ma cztery, a nie dwa, wymiary. W ogólnym przypadku należy podwoić wymiar przestrzeni związanej z układem. To oznacza obecność dodatkowych stanów, które z jakiegoś powodu nie są rozróżniane przez nasze urządzenia pomiarowe. Pomysł może wyglądać dziwnie, ale nie można go odrzucić wyłącznie na podstawie upodobań estetycznych. Szczególnie, że opierając się na tym pomysle, dla dowolnego układu składającego się z jednej cząstki o jednym stopniu swobody da się wymyślić konstrukcję, która daje identyczne przewidywania jak teoria zespolona. Powtórzmy: *jednej* cząstki o *jednym* stopniu swobody. A co z układami, które nie mają tej własności?

Tu trzeba przywołać kolejny standardowy postulat: jeżeli układ fizyczny składa się z dwóch podukładów, którym odpowiadają przestrzenie Hilberta $\mathcal{H}_1$ oraz $\mathcal{H}_2$, to przestrzeń Hilberta całego układu ma strukturę *iloczynu tensorowego* $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Z grubsza rzecz biorąc, zbiór $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ to przestrzeń wektorowa, której bazę stanowią uporządkowane pary wektorów bazowych przestrzeni $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ z odpowiednio zdefiniowanym iloczynem skalarnym. Stąd wynika, że wymiar przestrzeni całego układu to iloczyn wymiarów przestrzeni odpowiadających poszczególnym podukładom. Ustaliliśmy już wcześniej, że przestrzeń wymiaru zespolonego n jest w pewnym sensie równoważna przestrzeni wymiaru rzeczywistego $2n$. Jeżeli więc mamy dwie przestrzenie zespolonych wymiarów, n i m , to zespolony wymiar ich iloczynu tensorowego jest równy nm , a odpowiadające im rzeczywiste przestrzenie mają wymiary równe, odpowiednio, $2n$, $2m$ oraz $2nm$. Natomiast rzeczywisty wymiar iloczynu dwóch przestrzeni wymiarów $2n$ i $2m$ jest równy $4nm$. Widać więc, że jest zasadnicza różnica

między tensorowym rozmnażaniem przestrzeni nad liczbami zespolonymi i rzeczywistymi. Pojawia się więc potencjalna możliwość sprawdzenia, który sposób opisu lepiej pasuje do rzeczywistości doświadczalnej. Grupa Navascuésa postanowiła wykorzystać pojawiającą się tu rysę, zainspirowana pomysłem, który pozwolił wcześniej potwierdzić indeterminizm zjawisk kwantowych.

Rozważmy źródło cząstek, w którym zachodzi proces kreacji pary elektron–pozyton. W przypadku gdy w rozważanym procesie całkowity moment pędu układu znika, składowe spinu powstałych w procesie cząstek wzdłuż dowolnego kierunku muszą być przeciwnie skierowane. Obie cząstki wysyłamy do odległych obserwatorów: elektron w jedną, a pozyton w drugą stronę. Obserwatorzy dysponują dwoma detektorami mierzącymi rzut spinu ustawionymi w różnych kierunkach i w każdym powtórzeniu eksperymentu wybierają losowo, z którego detektora korzystają, wykonując pomiar na otrzymanej cząstce. Jeśli uzyskają wynik „w górę”, to przypisują mu wartość $+1$, a jeśli „w dół”, to -1 . Potem wspólnie wyliczają wartość pewnego wyrażenia, które zależy od rezultatu pomiarów i wybranych kierunków detektorów. Po wielu powtórzeniach eksperymentu można wyliczyć średnią wartość tego wyrażenia, którą oznaczymy przez S . W 1964 roku John Bell pokazał, że przy odpowiednio sprytnym doborze wyrażenia i kierunków detektorów dla teorii deterministycznych zachodzi zawsze $S \leq 2$, a mechanika kwantowa dopuszcza nawet $S = 2\sqrt{2}$.

Jak wyglądają rachunki dotyczące nierówności Bella, można przeczytać we wspomnianych już artykułach w Δ_{01}^5 oraz w Δ_{21}^2 .

Może więc dałoby się tak dobrać wspomniane wyrażenie i kierunki detektorów, żeby S była ograniczona dla „rzeczywistej” modyfikacji mechaniki kwantowej, a dla konwencjonalnej teorii mogła osiągać większe wartości? Okazuje się, że w opisanym scenariuszu nie jest to możliwe. Wystarczy jednak wprowadzić kilka drobnych ulepszeń: dodać jedno źródło i jednego obserwatora (wtedy jeden obserwator otrzymuje dwie cząstki, na których wykonuje jednoczesny pomiar) oraz zwiększyć liczbę detektorów w dyspozycji obserwatorów. W tej konfiguracji można znaleźć takie wyrażenie i kierunki, że dla dowolnej modyfikacji teorii, która używa wyłącznie liczb rzeczywistych oraz spełnia opisane wyżej postulaty, zachodzi $S < 7,66$. Standardowa teoria dopuszcza zaś $S = 6\sqrt{2} \approx 8,48$.

Wykonano już dwa eksperymenty, których wyniki wskazują na słuszność standardowej wersji mechaniki kwantowej – w obydwu przypadkach nierówność obowiązująca dla teorii opartych na liczbach rzeczywistych została złamana [3, 4]. Nie jest to ostateczny werdykt, ale bardzo silna przesłanka. Zamiast popadać w samozadowolenie, zastanówmy się jednak, jakie wnioski można z tego wszystkiego wyciągnąć. Z dużym prawdopodobieństwem należy odrzucić możliwość, że formalizm mechaniki kwantowej da się oprzeć wyłącznie na liczbach rzeczywistych, jeśli ma spełniać wspomniane wyżej standardowe postulaty. Może jednak dałoby się odrzucić jedno z krępujących założeń? Najmniej kontrowersyjnym kandydatem wydaje się ostatni postulat, ten dotyczący iloczynu tensorowego. W zamian należałoby wtedy zaproponować inny przepis na modelowanie złożonych układów.

W istocie da się to zrobić, wystarczy tylko użyć pomysłowego sposobu zapisu jednostek rzeczywistej i urojonej:

$$1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że powyższe macierze zachowują się dokładnie tak, jak powinny. Przy odrobinie sprytu da się na tej podstawie zbudować rzeczywistą teorię, która nie przestrzega postulatu iloczynu tensorowego i daje identyczne przewidywania jak zespolona wersja – wystarczy w odpowiedni sposób zastąpić wszystkie liczby zespolone macierzami [5]. Czy jednak nie jest to po prostu „zakamuflowane” użycie liczb zespolonych? Można powiedzieć, że tak. Spójrzmy na to z innej strony. Ten pozorny kamuflaż pokazuje, że liczby zespolone wcale nie są tak odległe od rzeczywistości, jak mogłoby się wydawać. Tak jak niegdyś w przypadku liczb niewymiernych czy ujemnych, zdrowy rozsądek znów okazuje się niezbyt dobrym doradcą w sprawach zmatematyzowanego opisu świata.

Bibliografia

- [1] C. N. Yang, „Square root of minus one, complex phases and Erwin Schrödinger”, w *Schrödinger: Centenary Celebration of a Polymath*, red. C. W. Kilmister (Cambridge University Press, 1987), s. 53–64.
- [2] M. O. Renou, D. Trillo, M. Weilenmann, T. P. Le, A. Tavakoli, N. Gisin, A. Acín i M. Navascués, *Nature* 600, 625 (2021).
- [3] Z. D. Li, Y. L. Mao, M. Weilenmann, A. Tavakoli, H. Chen, L. Feng, S. J. Yang, M. O. Renou, D. Trillo, T. P. Le, N. Gisin, A. Acín, M. Navascués, Z. Wang i J. Fan, *Phys. Rev. Lett.* 128, 040402 (2022).
- [4] M. C. Chen, C. Wang, F. M. Liu, J. W. Wang, C. Ying, Z. X. Shang, Y. Wu, M. Gong, H. Deng, F. T. Liang, Q. Zhang, C. Z. Peng, X. Zhu, A. Cabello, C. Y. Lu i J. W. Pan, *Phys. Rev. Lett.* 128, 040403 (2022).
- [5] E. C. G. S. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta* 33, 458 (1960).