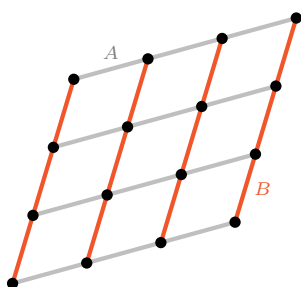


Lemat 2. Rozważamy wybrany z grafów A, B . Każda składowa tego grafu jest ścieżką, która nie zawraca. Ścisłej, jeśli do pewnej składowej należą wierzchołki $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_t$, to jedyne krawędzie tej składowej są postaci $i_m i_{m+1}$.

Dowód. Z definicji spójnej składowej wynika wprost, że żadna z tych stacji nie może być połączona z żadną spoza tej listy. Z drugiej strony, dana stacja może być połączona bezpośrednio tylko z jedną wyższą od siebie i jedną od siebie niższą; istotnie, połączenie a i b z c , gdzie $a < b < c$, przeczyłoby założeniu, że wyższy start oznacza wyższy koniec; analogicznie dla $a > b > c$. Zatem jeśli połączone są stacje $i < j$, a także $j < l$, to musi zachodzić $j < l$. Rozumując tak dalej, dostajemy dowód naszej obserwacji. $\square$

W szczególności żaden z grafów A, B nie zawiera cyklu. Możemy teraz powiązać liczbę k z liczbą składowych grafu, a więc z lematem 1.



Lemat 3. Graf bez cykli o N wierzchołkach i k krawędziach ma dokładnie $N - k$ składowych.

Dowód. Skonstruujemy nasz graf, zaczynając od $k = 0$ i dodając krawędzie jedna po drugiej, w dowolnej kolejności. Oczywiście dla $k = 0$ każdy wierzchołek jest sam w swojej składowej, więc składowych jest N . Dodając nową krawędź (na dowolnym etapie konstrukcji), nie możemy połączyć nią pary wierzchołków należących do jednej składowej – wówczas powstałby cykl. Oznacza to, że każda dodawana przez nas krawędź łączy wierzchołki, które uprzednio należały do dwóch różnych składowych. Tym samym łączy ona te dwie składowe, zmniejszając łączną ich liczbę o 1. Dowód jest zakończony. $\square$

Jesteśmy już bardzo blisko rozwiązania. Z lematu 3 wynika, że dla $k = n^2 - n + 1$ każdy z grafów A, B ma dokładnie $n - 1$ składowych, a wówczas na mocy lematu 1 istnieje para wierzchołków połączona przez każdą z dwóch firm. Bingo!

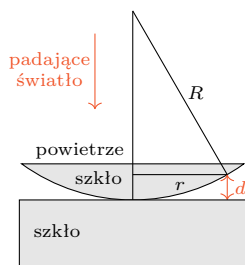
Pozostaje jeszcze jeden istotny szczegół. Czy jest to rzeczywiście minimalne k ? Innymi słowy, czy może zdarzyć się, że dwóch stacji o żądanej własności nie znajdziemy przy $k = n^2 - n$? Za odpowiedź niech posłuży schemat przedstawiony na marginesie (każdy kolor odpowiada połączeniom innej firmy).

Warto pokazywać uczniom zadania takie, jak to – wymagające, a jednak dostępne. Może nawet się zdarzyć, że zostanie rozwiązane przez samych uczniów. Ważne jest jednak, by nie zdradzać zbyt wcześnie jego źródła, aby problem nie został z góry uznany za niemożliwy do rozwiązania. Właściwie rozegrany, taki fortel może niejednej młodej osobie pokazać, jak wiele jest w jej zasięgu.



Zadania

Rozwiązania na str. 24



Przygotował Dominik BUREK

M 1843. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ liczby $1, 2, \dots, 2n$ można połączyć w pary tak, że iloczyn sum liczb w parach jest kwadratem liczby całkowitej.

M 1844. Na tablicy 10×10 znajduje się pewna liczba mrówek, każda zasiada na innym polu. Co minutę każda mrówka przechodzi do sąsiedniego pola na wschód, na południe, na zachód albo na

Przygotowała Magda CWOJDZIŃSKA

F 1137. Sonda kosmiczna znajduje się w przestrzeni międzyplanetarnej w odległości 570 000 km od Jowisza. Na pokładzie sondy znajduje się szpula magnetofonu o masie 1,3 kg i promieniu 12 cm, będąca walcem obracającym się wokół swojej osi. Szpula zostaje wprawiona w ruch obrotowy z okresem 8 s. Przyjmij, że oś obrotu szpuli pokrywa się z jedną z osi głównych sondy, a moment bezwładności całej sondy (bez szpuli) względem tej osi wynosi $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Zakładamy, że przed uruchomieniem magnetofonu sonda była nieruchoma i że nie działają na nią żadne siły zewnętrzne. Oblicz, o ile maksymalnie przesunie się środek tarczy Jowisza na fotografii wykonanej z sondy, w wyniku jej obrotu, po 2 minutach pracy magnetofonu.

F 1138. Na rysunku pokazano szklaną soczewkę o promieniu krzywizny $R = 3 \text{ m}$ umieszczoną na płaskiej płytce szklanej i oświetloną od góry światłem białym. Wyznacz promienie r prążków interferencyjnych – promienie pierścieni Newtona – odpowiadających barwie niebieskiej 460 nm. Przyjmij, że $r \ll R$.

północ. Kontynuuje drogę w tym samym kierunku tak długo, jak to możliwe. Kiedy mrówka dotrze do krawędzi tablicy, zmienia zwrot (utrzymując kierunek poruszania się). Wiadomo, że w ciągu godziny żadne dwie mrówki nie spotkały się na tym samym polu. Jaka jest maksymalna możliwa liczba mrówek na tablicy?

M 1845. Sfera przecina każdą z płaszczyzn ścian czworościanu foremego wzdłuż okręgu. Promienie tych okręgów wynoszą odpowiednio 1, 2, 3 i 4. Czy promień sfery może być równy 5?

Rozwiązania zadań ze strony 5



Rozwiązanie zadania M 1843.

Jeśli n jest liczbą parzystą, tj. $n = 2k$, to pary

$$(1, 4k), (2, 4k - 1), \dots, (2k, 2k + 1)$$

spełniają warunki zadania, gdyż

$$(1 + 4k) \cdot (2 + (4k - 1)) \cdot \dots \cdot (2k + (2k + 1)) = ((4k + 1)^k)^2.$$

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, tj. $n = 2k + 1$, to użyjemy indukcji matematycznej. Dla $n = 3$ mamy

$$(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6) = 18^2.$$

Założmy zatem, że teza zachodzi dla $n - 2 = 2k - 1$ i połączymy już w pary liczby $1, 2, \dots, 4k - 2$ tak, że iloczyn sum w parach jest równy m^2 dla pewnej liczby całkowitej m . Wtedy dokładając pary

$$(4k - 1, 4k + 2), (4k, 4k + 1),$$

dostajemy:

$$(4k - 1 + (4k + 2)) \cdot (4k + (4k + 1)) \cdot m^2 = ((8k + 1)m)^2.$$



Rozwiązanie zadania M 1844.

Odpowiedź: 40.

Udowodnimy, że na początku w każdym rzędzie lub kolumnie znajdują się co najwyżej dwie mrówki, których pierwszy ruch odbywa się w tym rzędzie lub kolumnie. Zatem całkowita liczba mrówek na tablicy wynosi maksymalnie $2 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 40$.

Rozpatrzmy standardowe kolorowanie szachowe naszej tablicy. Założmy, że po pewnym rzędzie lub kolumnie poruszają się

↓	→					←	↓
↓	→		↓	↓		←	↓
→		↓		↓			←
	→	↓				↓	←
	←						→
	←						→
	→	↑				↑	←
→			↑		↑		←
↑	→		↑	↑		←	↑
↑	→					←	↑

3 mrówki. Na podstawie zasady szufladkowej Dirichleta dwie z nich muszą zajmować pola tego samego koloru. Jednakże wtedy te mrówki muszą zająć to samo pole na długo przed upływem godziny!

Rysunek obok pokazuje spełniający warunki zadania sposób rozmieszczenia 40 mrówek wraz z kierunkami ich wędrówek.



Rozwiązanie zadania M 1845.

Odpowiedź: Tak.

Niech $ABCD$ będzie czworokątem foremnym. Rozważmy trzy płaszczyzny:

- Σ_1 : równoległa do DAB , w odległości 3 od niej i po tej samej stronie DAB co punkt C ,
- Σ_2 : równoległa do DBC , w odległości 4 od niej i po tej samej stronie DBC co punkt A ,
- Σ_3 : równoległa do DCA , w odległości $\sqrt{21}$ od niej i po tej samej stronie DCA co punkt B .

Niech O będzie punktem przecięcia się płaszczyzn Σ_1 , Σ_2 i Σ_3 . Rozpatrzmy sferę Ω o środku w punkcie O i promieniu 5. Weźmy jeszcze punkty A' , B' , C' odpowiednio na półprostych DA , DB , DC tak, aby $DA' = DB' = DC'$ i płaszczyzna $A'B'C'$ była styczna do Ω .

Sfera Ω przecina płaszczyznę $DA'B'$ wzdłuż okręgu o promieniu $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, płaszczyznę $DB'C'$ wzdłuż okręgu o promieniu $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, a płaszczyznę $DC'A'$ wzdłuż okręgu o promieniu $\sqrt{5^2 - \sqrt{21}^2} = 2$.

Przesuwamy teraz równoległe płaszczyznę $A'B'C'$ w kierunku D aż do momentu, w którym $O \in A'B'C'$. Widzimy, że Ω przecina $A'B'C'$ wzdłuż okręgu, którego promień może być dowolną liczbą z przedziału $(0, 5]$, w szczególności może być równy 1.



Rozwiązanie zadania F 1137.

W sytuacji, gdy na odizolowanej sondzie uruchamiamy szpulę magnetofonu, układ pozostaje wolny od zewnętrznych momentów. Całkowity moment pędu względem osi obrotu musi więc pozostać stały. Jeśli przed włączeniem wszystko spoczywa, to po uruchomieniu szpuli całkowity moment pędu nadal równy jest zeru: moment pędu szpuli zostaje skompensowany przez przeciwny moment pędu powolnego obrotu korpusu sondy.

Niech I_s oznacza moment bezwładności korpusu sondy względem danej osi, a I_r moment bezwładności szpuli (traktowanej jak jednorodny walec, $I_r = \frac{1}{2}mr^2$). Oznaczmy także przez $\omega_r = 2\pi/T$ prędkość kątową szpuli, gdzie T jest jej okresem obrotu. Z zasady zachowania momentu pędu otrzymujemy natychmiast:

$$I_s \omega_s + I_r \omega_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_s = -\frac{I_r}{I_s} \omega_r.$$

W konsekwencji po czasie t kąt obrotu sondy wynosi:

$$\Delta\varphi = |\omega_s|t = \frac{I_r}{I_s} \frac{2\pi t}{T} = \frac{mr^2}{I_s} \frac{\pi t}{T}.$$

Jeśli oś obrotu ma składową prostopadłą do kierunku patrzenia kamery, ten kąt przekłada się bezpośrednio na ugięcie linii celowania na niebie. Równoważne przesunięcie liniowe środka tarczy Jowisza w rzucie na odległość D to (w przybliżeniu dla małego kąta)

$$\Delta x = D \Delta\varphi.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$\Delta\varphi = 8,82 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,0505^\circ \approx 182''.$$

Dla odległości $D = 5,7 \cdot 10^5$ km:

$$\Delta x = D \Delta\varphi \approx 500 \text{ km}.$$

Uwaga: Jeżeli oś obrotu pokrywa się z osią optyczną kamery, obraz jedynie obraca się w kadrze – bez przesunięcia środka tarczy.



Rozwiązanie zadania F 1138.

Rozważmy obraz interferencyjny powstały przez fale odbite od górnej i dolnej powierzchni klina powietrznego. Fala odbita od dolnej powierzchni ulega zmianie fazy o π , podczas gdy fala odbita od górnej powierzchni nie. W miejscu, gdzie grubość klina wynosi d , warunkiem na maksimum natężenia jest

$$2d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda,$$

gdzie λ jest długością fali w powietrzu, a m jest liczbą całkowitą. Zatem

$$d = \frac{(2m + 1)\lambda}{4}.$$

Z geometrii rysunku wynika, że

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2},$$

gdzie R jest promieniem krzywizny soczewki, a r jest promieniem pierścienia Newtona. Zatem

$$\frac{(2m + 1)\lambda}{4} = R - \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Skąd otrzymujemy:

$$r = \sqrt{\frac{(2m + 1)R\lambda}{2} - \frac{(2m + 1)^2\lambda^2}{16}}.$$

Jeśli R jest dużo większe od długości fali, pierwszy składnik dominuje nad drugim i

$$r = \sqrt{\frac{(2m + 1)R\lambda}{2}}.$$

Wartości liczbowe to: $r_1 \approx 1,44$ mm, $r_2 \approx 1,86$ mm.